

тогда как в п. 19 гл. IV т. I мы видели, что

$$-\frac{v}{r_0} = \frac{1}{9 \cdot 10^6}, \quad \gamma_3 = \cos 23^\circ 30' = 0,917.$$

При этих численных значениях и, принимая для отвлеченных чисел  $m_0/m'$ ,  $(C-A)/C$  значения 82 и  $1/305$ , которые можно вывести из других астрономо-геодезических соображений, мы установим, что уравнение (119') будет удовлетворяться с достаточной степенью точности; мы получили, таким образом, указанное выше доказательство причинной зависимости между лунно-солнечным притяжением и земной прецессией.

Заметим, что, так как в действительности между всеми элементами, входящими в уравнение (119'), элементом наименее доступным для измерения каким-либо другим путем является отношение  $m_0/m'$  массы Земли к массе Луны, то с астрономической точки зрения наибольший интерес, который представляет формула (119'), будет заключаться именно в том, чтобы дать хорошую численную оценку этого отношения, если заранее считается достоверным, что земная прецессия проходит от лунно-солнечного притяжения.

Следует заметить, что аддитивное свойство потенциала отражается также и на угловой скорости  $v$ , которая аналогично может рассматриваться как сумма двух слагаемых  $v_1$ ,  $v_2$ , происходящих первое от действия Солнца, второе от действия Луны; из уравнения (119') соответственно двум слагаемым потенциала получим

$$-\frac{v_1}{r_0} = \frac{3}{2} \frac{C-A}{C} \gamma_3 \frac{n^2}{r_0^2}, \quad -\frac{v_2}{r_0} = \frac{3}{2} \frac{C-A}{C} \gamma_3 \frac{n'^2}{r_0^2 \left(1 + \frac{m_0}{m'}\right)},$$

так что будем иметь

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \frac{1}{1 + \frac{m'}{m}}.$$

Так как  $n'/n$  есть не что иное, как отношение одного года к одному лунному месяцу, т. е. приблизительно 13,4, то найдем

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{169}{83} = 2,13,$$

откуда следует, что влияние Луны на земную прецессию будет более чем вдвое интенсивнее влияния Солнца.

## § 11. Интегрирование уравнений Гамильтона — Якоби посредством разделения переменных

**62.** Случай интегрируемости Лиувилля. Интегрирование канонической системы было сведено в § 6 к определению полного интеграла для соответствующего уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби.

Наиболее замечательными случаями, в которых действительно удается указать такой полный интеграл, являются те, к которым применим метод *разделения переменных*. Этим мы хотим сказать, что при характеристической функции, не зависящей от  $t$ , уравнению Гамильтона — Якоби (п. 38)

$$H(p|q) = \text{const} = E \quad (p_h = \frac{\partial W}{\partial q_h}; \quad h = 1, 2, \dots, n)$$

можно удовлетворить функцией вида

$$W = \sum_{h=1}^n W_h(q_h), \quad (120)$$

где, для всякого значения индекса  $h$ ,  $W_h$  означает функцию от одного только аргумента  $q_h$  и, конечно,  $W_h$  в своей совокупности зависят от  $n$  произвольных постоянных, одна из которых, согласно принимающей здесь постановке Якоби, является самой постоянной энергии  $E$ .

Конечно, такая возможность может встретиться только для частных видов характеристической функции  $H$ ; следует, однако, отметить, что характеристические функции, обладающие указанным свойством, непосредственно встречаются в важных динамических задачах.

Первый пример, указанный Лиувиллем и ставший теперь классическим, дают те динамические консервативные системы, в которых путем надлежащего выбора обобщенных координат  $q$  живая сила материальной системы и потенциал имеют вид

$$T = \frac{1}{2} b \sum_{h=1}^n A_h \dot{q}_h^2, \quad U = \frac{1}{b} \sum_{h=1}^n U_h, \quad (121)$$

где положено

$$b = \sum_{h=1}^n B_h,$$

причем каждое из  $A_h$ ,  $B_h$ ,  $U_h$  является функцией одного аргумента  $q_h$ .

Легко видеть, что достаточно было бы ввести в качестве обобщенных координат новые переменные  $q^*$ , определяемые равенствами

$$dq^* = \sqrt{A_h} \cdot dq_h \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

чтобы, не нарушая общности, сделать все  $A_h$  равными 1 (т. е. привести квадратичную форму  $\sum_{h=1}^n A_h \dot{q}_h^2$ , которая после умножения на  $b/2$  дает живую силу, к евклидовой форме); но так как в некоторых, весьма интересных конкретных задачах, когда мы пользуемся параметрами, наиболее естественными для данной задачи, живая сила  $T$  принимает вид, указанный в первом из равенств (121), то предпочтительнее вести вычисления в этих переменных. Однако, чтобы избежать исследований, мало пригодных для наших целей, предположим заранее,

что аргументы  $q$  заключены в некоторой области, в которой функции  $A_h$ ,  $B_h$  и  $b$  остаются не только правильными, наравне с  $U$ , но также и отличными от нуля.

Заметим теперь, что при наличии первого из равенств (121) на основании правила п. 5 имеем

$$(T) = \frac{1}{2b} \sum_{h=1}^n \frac{p_h^2}{A_h}.$$

Уравнение Гамильтона — Якоби, для которого требуется найти полный интеграл вида (120), будет здесь иметь вид

$$H = \frac{1}{b} \sum_{h=1}^n \left( \frac{1}{2} \frac{p_h^2}{A_h} - U_h \right) = E, \quad (122)$$

где на основании равенства (120) надо положить

$$p_h = \frac{dW_h}{dq_h} = W'_h \quad (h = 1, 2, \dots, n);$$

если умножим обе части уравнения (122) на  $b$  и примем во внимание явное выражение множителя  $b$ , то можно написать

$$\sum_{h=1}^n \left( \frac{1}{2} \frac{W_h'^2}{A_h} - U_h - EB_h \right) = 0. \quad (122')$$

Таким образом, левая часть уравнения представлена в виде суммы  $n$  слагаемых, каждое из которых зависит от одного только  $q_h$ . Обозначая эти слагаемые соответственно через  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ , будем иметь

$$\sum_{h=1}^n \pi_h = 0, \quad (123)$$

а так как это равенство должно удовлетворяться тождественно относительно  $q$ , то достаточно взять частные производные по этим переменным, чтобы получить  $\pi'_h = 0$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ), т. е. чтобы заключить, что каждое  $\pi$  должно сводиться к постоянной и что уравнение (122') равносильно  $n$  обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{1}{2} \frac{W_h'^2}{A_h} - U_h - EB_h = \pi_h \quad (h = 1, 2, \dots, n), \quad (124)$$

где  $\pi$  обозначают  $n$  постоянных, связанных между собой только соотношением (123).

Поэтому мы можем рассматривать как вполне произвольные постоянные  $n - 1$  из них, например  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}$ , а  $n$ -е постоянное определится соответственно из уравнения

$$\pi_n = - \sum_{h=1}^{n-1} \pi_h; \quad (123')$$

что касается величин  $W_h$ , то определение каждой из них сводится на основании уравнений (124) к одной квадратуре

$$W_h = \int \chi_h dq_h \quad (h = 1, 2, \dots, n), \quad (125)$$

где для простоты положено

$$\chi_h = \sqrt{2A_h(U_h + EB_h + \pi_h)} \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

При этих значениях  $W_h$  уравнение (120) определит некоторую функцию  $W$  от  $q$  и  $n$  произвольных постоянных  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}, E$ , удовлетворяющую в силу способа, которым она получена, уравнению Гамильтона — Якоби (122); поэтому остается только проверить, что мы действительно имеем полный интеграл, т. е. (п. 38) что определитель

$$\nabla' = \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial \pi_j} \right\| \quad (h, j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (126)$$

не равен тождественно нулю.

Для этой цели в соответствии с принятыми уже предположениями допустим, что  $q$  и  $\pi$  выбираются в области, в которой будет отличен от нуля каждый из трех членов  $U_h + EB_h + \pi_h$ , в силу чего на основании уравнений (124) отличным от нуля будет также всякое отдельное  $W'_h$ ; а так как любой элемент детерминанта  $\nabla'$  определяется выражением

$$\frac{\partial W'_h}{\partial \pi_j} \quad (h, j = 1, 2, \dots, n-1),$$

то достаточно принять во внимание те же уравнения (124), чтобы установить, что такой элемент при  $j \neq h$  тождественно равен нулю, а при  $j = h$  имеет вид

$$\frac{A_h}{W'_h} \quad (h = 1, 2, \dots, n-1);$$

поэтому определитель  $\nabla'$ , как это и требовалось показать, отличен от нуля.

**63. Общий интеграл и ход движения.** Определив для уравнения Гамильтона — Якоби  $H = E$  полный интеграл (120), мы получим согласно правилу п. 38 общее решение канонической системы, если, определив значения  $W_h$  по формулам (125), подставим полный интеграл в уравнения (74<sub>a</sub>) п. 38, определяющие траекторию, и в уравнение (74<sub>b</sub>), определяющее закон движения по этой траектории. Таким образом, принимая во внимание выражение (123') для величины  $\pi_n$  и

дифференцируя под знаком интеграла по каждому  $\pi_j$  (при  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ ) и по  $E$ , мы придем к окончательным уравнениям

$$\pi_j = \int \frac{A_j}{\chi_j} dq_j - \int \frac{A_n}{\chi_n} dq_n \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (126_a)$$

$$t - t_0 = \sum_{h=1}^n \int \frac{A_h B_h}{\chi_h} dq_h. \quad (126_b)$$

Но если мы хотим быстро составить себе представление о ходе движения, то вместо этих уравнений удобно обратиться к уравнениям (124). Так как на основании характеристической формы (121), принятой для  $T$ , моменты  $p_h$  связаны с соответствующими  $\dot{q}$  равенствами

$$p_h = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = b A_h \dot{q}_h \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

и, кроме того, тождественны с  $W'_h$ , то мы видим, что уравнения (124) можно написать в одном из двух видов

$$\frac{1}{2} \frac{p_h^2}{A_h} - U_h - EB_h = \pi_h, \quad (124')$$

$$\frac{1}{2} b^2 A_h \dot{q}_h^2 - U_h - EB_h = \pi_h, \quad (124'')$$

$$(h = 1, 2, \dots, n).$$

Так как уравнения (124'), помимо произвольных постоянных, содержат аргументы  $p, q$ , то их можно рассматривать как  $n$  интегралов канонических уравнений, между тем как уравнения (124'') вместе с  $q$  содержат  $\dot{q}$  и потому представляют собой  $n$  первых квадратичных интегралов для первоначальных динамических уравнений Лагранжа, эквивалентных канонической системе.

При качественном изучении движения более удобными оказываются уравнения (124''), каждое из которых содержит только одну из переменных  $q$  и представляет само по себе дифференциальное уравнение первого порядка уже неоднократно встречавшегося типа

$$\dot{q}^2 = \Phi(q).$$

Поэтому на основании результатов исследования § 6 гл. I можно заключить, что каждая из переменных  $q$  представляет собой периодическую функцию времени или асимптотически приближается к предельному значению. Чтобы точнее определить характер движения, значительно целесообразнее было бы изучить изменение параметров  $q$  при помощи уравнений (124''), рассматривая их как функции не-

только от  $t$ , но также и от  $n - 1$  аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ; однако мы не будем останавливаться на этом<sup>1)</sup>.

**64.** Случай интегрируемости Штеккеля. Штеккель поставил себе задачу указать другие классы динамических задач, к которым можно было бы применить метод разделения переменных<sup>2)</sup>; в частности, он искал все динамические задачи, интегрируемые этим методом, ограничиваясь предположением, что живая сила, как и в случае Лиувилля, является квадратичной формой от ортогонального вида. Таким образом, он пришел к важному обобщению результатов предыдущих пунктов; не воспроизведя соображений, какими руководствовался Штеккель в его исследовании, мы ограничимся здесь лишь характеристикой динамических задач, найденных им таким способом.

Рассмотрим  $n^2$  функций  $\varphi_{v,h}(q_h)$  при  $v, h = 1, 2, \dots, n$ , таких, что каждая из них зависит только от одной переменной  $q_h$ , индекс которой совпадает со вторым индексом рассматриваемой функции, и предположим, что определитель

$$D = \|\varphi_{v,h}\| \quad (h_1, v_1 = 1, 2, \dots, n)$$

не равен тождественно нулю. Если обозначим через  $\psi_h$  при  $h = 1, 2, \dots, n$  величины, взаимные элементы какой-нибудь строки определителя  $D$ , например  $n$ -ой, то увидим на основании равенства

$$\sum_{h=1}^n \varphi_{nh} \psi_h = 1, \quad (127)$$

что  $\psi_h$  не все равны нулю. Условившись заранее ограничить изменение  $q$  некоторой областью, в которой функции  $\psi_h$  остаются отличными от нуля, рассмотрим динамическую, консервативную систему, обладающую живой силой и потенциалом вида

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \frac{\dot{q}_h^2}{\psi_h}, \quad U = \sum_{h=1}^n \psi_h U_h,$$

где каждая из функций  $U_h$ , как и в п. 62, зависит только от  $q_h$  и, само собой разумеется, является конечной и правильной в рассматриваемой области.

Выражая в  $T$  количества  $q$  через  $p_h$ , будем иметь (п. 5)

$$(T) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \psi_h p_h^2,$$

<sup>1)</sup> См., например, Charlier, Die Mechanik des Himmels, Leipzig, Veit, т. II, 1902, стр. 97—116.

<sup>2)</sup> Habilitationsschrift, Halle, 1891; Math. Ann., т. XLII, 1893, стр. 537—563. См. также: Goursat, Comptes rendus, т. 116, 1893, стр. 1050—1051; Viergatti, Rend. Circ. Mat. di Palermo, т. IX, 1894, стр. 125—135.

в силу чего уравнение Гамильтона — Якоби  $H = E$ , полный интеграл которого  $W$  в форме (120) требуется определить, принимает вид

$$\sum_{h=1}^n \psi_h \left( \frac{1}{2} p_h^2 - U_h \right) = E \quad \left( p_h = \frac{\partial W}{\partial q_h}; \quad h = 1, 2, \dots, n \right). \quad (128)$$

Теперь легко убедиться, что для того, чтобы получить полный интеграл этого уравнения, достаточно определить  $W_h$  из  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\frac{1}{2} W_h'^2 = \sum_{v=1}^{n-1} \pi_v \varphi_{vh} + E \varphi_{nh} + U_h \quad (h = 1, 2, \dots, n), \quad (129)$$

где  $\pi_1, \dots, \pi_{n-1}$  обозначают  $n-1$  произвольных постоянных.

В самом деле, функция  $W = \Sigma W_h$  удовлетворяет уравнению (128), как это непосредственно можно увидеть, если обратить внимание на равенства  $p_h = W'_h$  и уравнение (129). Далее, чтобы показать, что  $W$  есть полный интеграл, достаточно заметить, что при качественных ограничениях, аналогичных ограничениям п. 62, можно принять, что всякое  $W'_h$  в рассматриваемой области отлично от нуля; после этого увидим, что определитель

$$\nabla' = \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial \pi_j} \right\| = \left\| \frac{\partial W'_h}{\partial \pi_j} \right\| \quad (h, j = 1, 2, \dots, n-1),$$

так как он приводится к виду

$$\frac{1}{W'_1 W'_2 \dots W'_{n-1}} \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-11} & \varphi_{n-12} & \dots & \varphi_{n-1n-1} \end{vmatrix} = \frac{\varphi_n D}{W'_1 W'_2 \dots W'_{n-1}},$$

не может тождественно равняться нулю.

Как мы уже знаем (п. 38), общее решение канонической системы мы найдем из равенств (74<sub>a</sub>), (74<sub>b</sub>); что касается аналитической природы переменных  $q$ , как функций от  $t$  (и от  $n-1$  постоянных  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ), то имеют место соображения, аналогичные тем, которые были приведены в предыдущем пункте. Здесь, как и раньше, успех применения способа разделения переменных тесно связан с существованием  $n$  квадратичных интегралов относительно  $\dot{q}$  для лагранжевых уравнений движения; эти интегралы определяются здесь уравнениями (129), в которые вместо  $W'_h = p_h$  должны быть подставлены

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\dot{q}_h}{\psi_h} \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Так как рассматриваемый здесь случай, как было сказано вначале, представляет собой обобщение случая Лиувилля, то целесообразно указать, какие значения должны быть взяты для функций  $\varphi_{vh}(q_h)$ , чтобы снова вернуться к динамической задаче Лиувилля.

Если ограничиться решением этой задачи в предположении, что все  $A_h$  п. 62 равны 1, то достаточно взять  $\varphi_{nh}$  соответственно равными  $B_h$ , а остальные  $\varphi$  постоянными, причем все алгебраические дополнения функций  $\varphi_{nh} = B_h$ , т. е. функций  $\psi_n$ , должны быть равны 1, например

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B_n \end{vmatrix}$$

Если в этом определителе умножим элементы первого, второго, ...,  $n$ -го столбца соответственно на  $1/A_1, 1/A_2, \dots, 1/A_n$ , то снова вернемся к случаю (только формально более общему), который мы изучали в пп. 62, 63.

**65.** Добавим еще, что сам Штеккель и другие указали дальнейшие случаи интегрируемости способом разделения переменных и что даже был установлен критерий классификации всех типов возможных динамических задач, интегрируемых этим методом<sup>1)</sup>. Действительное определение этих типов впервые и исчерпывающим образом было выполнено при  $n=2$  Морера<sup>2)</sup>, а позднее было дополнено для  $n=3$  Даль-Аква (Dall'Acqua)<sup>3)</sup>.

Было замечено также<sup>4)</sup>, что если для консервативной динамической системы с характеристической функцией  $H=(T)-U$  задача может быть сведена к квадратурам, то это справедливо и для случая, когда  $(T)=E$ , т. е. для соответствующей задачи о движении при отсутствии сил (движение по инерции).

С другой стороны, то обстоятельство, что в указанных выше случаях Лиувилля и Штеккеля приложимость метода разделения переменных связывается с существованием квадратичных относительно  $q$  первых интегралов, заставляло изучать условия, при которых динамическая задача допускает первые интегралы указанного выше вида. Известные типы таких задач были указаны, кроме Штеккеля, Ди Пирро<sup>5)</sup> и Пэнлеве<sup>6)</sup>. И для этих динамических задач,

<sup>1)</sup> Levi-Civita, *Math. Annalen*, т. LIX, 1904, стр. 383—397.

<sup>2)</sup> *Atti della R. Acc. di Torino*, т. XVI, 1881, стр. 276—295.

<sup>3)</sup> *Math. Annalen*, т. LXVI, 1908, стр. 398—415.

<sup>4)</sup> Levi-Civita, loc. cit.

<sup>5)</sup> *Ann. di Mat.* (2), т. XXIV, 1896, стр. 315—334.

<sup>6)</sup> *Comptes rendus*, т. 124, 1897, стр. 221—224.

допускающих квадратичные относительно  $\dot{q}$  интегралы, также имеет место замечание, что эти интегралы продолжают существовать даже и в том случае, когда силы отсутствуют; с другой стороны, возможна еще систематическая классификация, из которой следует, что, наверное, существуют другие случаи, помимо открытых до сих пор<sup>1)</sup>; однако задача полного определения таких случаев представляет, повидимому, большие трудности \*).

### § 12. Движение точки, притягиваемой неподвижным центром по закону Ньютона. Переменные Кеплера

**66.** Уравнения движения. Предполагая, что точка имеет массу, равную 1, отнесем ее к полярным координатам, с полюсом в центре притяжения  $O$ , и обозначим полярный угол через  $\sigma$ , вместо обычного символа  $\theta$ , которому мы немного ниже приадим другое значение. В силу этого каноническое выражение живой силы будет дано формулой (п. 6)

$$(T) = \frac{1}{2} \left( p_{\rho}^2 + \frac{1}{\rho^2} p_{\sigma}^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \sigma} p_{\varphi}^2 \right),$$

а потенциал ньютонианского притяжения точкой  $O$  будет иметь вид

$$U = \frac{k}{\rho},$$

<sup>1)</sup> Levi-Civita, *Comptes rendus*, там же, 1434—1438, стр. 392—395.

\* ) Метод разделения переменных при интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в более общем виде, чем это указано в тексте, разработан Имшенецким В. Г. и изложен в его сочинении „Интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядков“, Москва, 1916. Впервые напечатано в 1865 г. в „Ученых записках Казанского университета“.

Имшенецкий Василий Григорьевич родился в Ижевске в 1832 г., умер в Москве в 1892 г. Окончил физико-математический факультет Казанского университета в 1853 г., защитил магистерскую диссертацию в 1865 г., а в 1868 г. защитил докторскую диссертацию.

Научно-педагогическая деятельность В. Г. Имшенецкого протекала в Казанском университете и в Харьковском университете, а в 1881 г. он был избран действительным членом Петербургской Академии наук.

Основные работы В. Г. Имшенецкого охватывают вопросы интегрирования уравнений с частными производными первого и второго порядков, а также интегрирование линейных дифференциальных уравнений высших порядков с одним независимым переменным. Предложенный им метод отделения переменных для интегрирования уравнений с частными производными первого порядка имеет тем большее значение для аналитической механики, что доведение задачи до конца вне рамок применения этого метода является счастливой случайностью.

Биографический очерк, содержащий характеристику жизни и научной деятельности В. Г. Имшенецкого, помещен в журнале „Математический сборник“, т. 18, 1896. (Прим. ред.)