допускающих квадратичные относительно $\dot{q}$ интегралы, также имеет место замечание, что эти интегралы продолжают существовать даже и в том случае, когда силы отсутствуют; с другой стороны, возможна еще систематическая классификация, из которой следует, что, наверное, существуют другие случаи, помимо открытых до сих пор [1]); однако задача полного определения таких случаев представляет, повидимому, большие трудности *).

§ 12. Движение точки, притягиваемой неподвижным центром по закону Ньютона. Переменные Кеплера

66. Уравнения движения. Предполагая, что точка имеет массу, равную 1, отнесем ее к полярным координатам, с полюсом в центре притяжения O, и обозначим полярный угол через σ, вместо обычного символа θ, которому мы немного ниже придадим другое значение. В силу этого каноническое выражение живой силы будет дано формулой (п. 6)

$$(T)=\frac{1}{2}\left(p_\rho^2+\frac{1}{\rho^2}p_\sigma^2+\frac{1}{\rho^2\sin^2\sigma}p_\varphi^2\right),$$

а потенциал ньютонианского притяжения точкой O будет иметь вид

$$U=\frac{k}{\rho},$$

---

[1]) Levi-Civita, *Comptes rendus*, там же, 1434—1438, стр. 392—395.

*) Метод разделения переменных при интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в более общем виде, чем это указано в тексте, разработан Имшенецким В. Г. и изложен в его сочинении „Интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядков", Москва, 1916. Впервые напечатано в 1865 г. в „Ученых записках Казанского университета".

Имшенецкий Василий Григорьевич родился в Ижевске в 1832 г., умер в Москве в 1892 г. Окончил физико-математический факультет Казанского университета в 1853 г., защитил магистерскую диссертацию в 1865 г., а в 1868 г. защитил докторскую диссертацию.

Научно-педагогическая деятельность В. Г. Имшенецкого протекала в Казанском университете и в Харьковском университете, а в 1881 г. он был избран действительным членом Петербургской Академии наук.

Основные работы В. Г. Имшенецкого охватывают вопросы интегрирования уравнений с частными производными первого и второго порядков, а также интегрирование линейных дифференциальных уравнений высших порядков с одним независимым переменным. Предложенный им метод отделения переменных для интегрирования уравнений с частными производными первого порядка имеет тем большее значение для аналитической механики, что доведение задачи до конца вне рамок применения этого метода является счастливой случайностью.

Биографический очерк, содержащий характеристику жизни и научной деятельности В. Г. Имшенецкого, помещен в журнале „Математический сборник", т. 18, 1896. (*Прим. ред.*)

где положено $k = fm_0$, причем f, как обычно, есть постоянная всемирного тяготения и m_0 — масса центрального тела. Легко видеть, что задача является интегрируемой способом разделения переменных, как частный случай задачи Штеккеля (п. 64) при $n = 3$.

В данном случае имеем

$$U_1 = k, \quad U_2 = U_3 = 0; \quad \psi_1 = 1, \quad \psi_2 = \frac{1}{\rho^2}, \quad \psi_3 = \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \sigma},$$

и, следовательно,

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho^2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \sigma} & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Однако, ввиду того интереса, который представляет рассматриваемый вопрос для небесной механики, а также чтобы придерживаться исторического порядка, будем, следуя Пуанкаре [1]), непосредственно искать полный интеграл W соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби, принимающего здесь вид

$$H = \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\sigma^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \sigma} p_\varphi^2\right) - \frac{k}{\rho} = E, \tag{130}$$

где

$$p_\rho = \frac{\partial W}{\partial \rho}, \quad p_\sigma = \frac{\partial W}{\partial \sigma}, \quad p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi}. \tag{131}$$

Постараемся прежде всего удовлетворить этому уравнению функцией W, не зависящей от долготы φ и имеющей вид

$$W = W_1 + G\sigma, \tag{132}$$

где W_1 означает функцию только от ρ, а G есть постоянная.

Нам придется положить в уравнении (130)

$$p_\rho = W_1', \quad p_\sigma = G, \quad p_\varphi = 0, \tag{133}$$

и мы придем к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$W_1'^2 = 2E + \frac{2k}{\rho} - \frac{G^2}{\rho^2}, \tag{134}$$

интегрируемому, очевидно, посредством одной квадратуры. Так как аддитивную постоянную при W_1, появляющуюся при интегрировании уравнения (134), нельзя рассматривать за существенную в формуле (132), то интеграл W, который получится таким образом для уравнения (130), будет зависеть только от двух постоянных E, G и, следовательно, не будет искомым полным интегралом. Но из него легко

[1]) H. Poincaré, Leçons de la Mécanique céleste, т. I, Париж, 1905, гл. III.

вывести на основании геометрических соображений интеграл, обладающий большей общностью и, кроме того, удовлетворяющий всем требуемым условиям. В самом деле, полярный угол σ образован прямой OP и положительной полуосью Oz, имеющей неизменное направление в пространстве, которое может быть выбрано произвольно; поэтому, в конце концов, σ есть угол, который полупрямая OP образует с некоторой произвольной прямой. Возьмем произвольную полупрямую ON и обозначим через v угол, который она образует с полупрямой OP. Легко видеть, что уравнение (130) удовлетворяется функцией

$$W = W_1 + Gv, \tag{132'}$$

где, как и в формуле (132), G есть постоянная и W_1 — функция только от ρ, определяемая с точностью до несущественной аддитивной постоянной из уравнения (134). Действительно, представим себе, что выполнено вращение осей, которое приводит ось z к совпадению с ON. Относительно новых осей уравнение Гамильтона — Якоби допускает, конечно, как это говорилось в самом начале, интеграл (132), причем функция W_1 определяется из уравнения (134). Если посредством обратного вращения мы возвратимся к осям $Oxyz$, то функция W_1, как зависящая только от расстояния ρ, которое не меняется при повороте, останется неизменной, равно как и постоянная G, так что для уравнения (130) мы как раз получим интеграл (132').

В силу своего геометрического значения v зависит от угловых координат σ и φ полупрямой OP и от двух аналогичных постоянных, определяющих направление ON. Но здесь, для того чтобы иметь полный интеграл уравнения (130), достаточно наряду с E и G ввести еще только одну постоянную. Поэтому мы можем отказаться от полной произвольности полупрямой ON и предположить, что она расположена в плоскости Oxy; в силу этого последняя произвольная постоянная геометрически будет представлена углом θ между полупрямой ON в этой плоскости и осью Ox. Следовательно, угол $v = \widehat{NOP}$ будет функцией от этой постоянной θ, а также, как уже говорилось, функцией полярного угла σ и долготы φ точки P, но не будет зависеть от ρ.

Для того чтобы убедиться, что определенный таким образом интеграл уравнения (130) является полным, мы должны согласно правилу п. 38 проверить, что, по крайней мере, при соответствующих качественных ограничениях не будет равен нулю тождественно его смешанный функциональный определитель относительно ρ, σ и G, θ,

$$\nabla' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_\rho}{\partial G} & \dfrac{\partial p_\rho}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial p_\sigma}{\partial G} & \dfrac{\partial p_\sigma}{\partial \theta} \end{vmatrix},$$

который, если принять во внимание равенство (132′) и то обстоятельство, что v не зависит от ρ, примет вид

$$\nabla' = G\frac{\partial W_1'}{\partial C}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\sigma\,\partial\theta} = \frac{G^2}{\rho^2 W_1'}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\sigma\,\partial\theta}.$$

Далее, так как v в силу своего определения есть угол, заключенный между направлением OP с направляющими косинусами $\sin\sigma\cos\varphi$, $\sin\sigma\sin\varphi$, $\cos\sigma$ и направлением ON с направляющими косинусами $\cos\theta$, $\sin\theta$, 0, то имеем

$$\cos v = \sin\sigma\cos(\varphi-\theta),$$

так что, очевидно, $\partial^2 v/\partial\sigma\,\partial\theta$ не будет тождественно равно нулю.

Поэтому достаточно ограничить выбор значений независимых переменных и постоянных интеграций некоторой областью, в которой, помимо этой второй производной, не исчезают также W_1', G и ρ, чтобы быть уверенным, что определитель ∇' остается отличным от нуля.

При этом ограничении уравнения движения получаются непосредственно на основании общего правила из равенств

$$\frac{\partial W}{\partial G} = g,\quad \frac{\partial W}{\partial\theta} = -\Theta,\quad \frac{\partial W}{\partial E} = t-t_0, \tag{135}$$

где g, Θ и t_0 обозначают новые произвольные постоянные.

67. Истолкование канонических постоянных в случае Кеплера. Уравнения (135) содержат все, что относится к движению; в частности, на основании этих уравнений можно было бы определить три типа движения: эллиптическое, параболическое и гиперболическое (которые мы уже изучали более прямыми элементарными методами в § 2 гл. III), замечая, что эти движения соответствуют трем случаям, в которых постоянная E (полная энергия) будет отрицательной, нулем или положительной. Здесь мы не будем заниматься этим довольно кропотливым разбором; допуская, что интегралы (135) необходимо должны совпадать с интегралами, найденными в гл. III, мы воспользуемся ими для изучения геометрического и кинематического значений канонических постоянных E, G, g и Θ. Ограничиваясь случаем, имеющим наибольший интерес для исследования движений планет, мы обратимся исключительно к предположению $E<0$, т. е. к кеплерову движению.

Прежде всего мы будем предполагать, что полупрямая ON проходит через восходящий узел и потому θ будет долготой восходящего узла (гл. III, п. 25); далее обозначим через v угол полупрямой OP с линией (направленной) узлов.

Здесь очень важно хорошо разъяснить одно замечание. Величина v, равно как и σ, в течение движения точки P по орбите соответствует,

по определению, вогнутому углу между двумя полупрямыми ON, OP и поэтому остается всегда заключенной между O и π. Поэтому если введем также угол v^* полупрямой OP, отсчитываемый от ON в сторону движения (который обычно называется *аргументом долготы* точки P), то, очевидно, между v и v^* будет иметь место соотношение типа

$$v^* = \pm v + 2N\pi,$$

где попеременно будут иметь место знаки $+$ и $-$ в последовательных полуоборотах полупрямой OP, и N есть целое число, равное нулю при первом полуобороте, единице во втором и третьем, двум в четвертом и пятом и т. д.

Замечая теперь, что уравнение Гамильтона — Якоби (130) остается неизменным, если положим $\sigma^* = \pm\sigma + 2N\pi$, мы увидим, что в полном интеграле (132′) v можно истолковывать как действительную аномалию.

Принимая теперь это истолкование, найдем прежде всего выражение $\partial v/\partial\theta$; для этой цели будем рассматривать наряду с осями координат $Oxyz$ две другие вспомогательные системы $Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$, первая из которых получится из системы $Oxyz$ посредством вращения на угол θ вокруг оси Oz, после которого новая ось Ox_1 совпадет с линией узлов, а вторую мы получим, поворачивая систему $Ox_1y_1z_1$ вокруг линии узлов Ox_1 на угол i наклонения плоскости орбиты к плоскости xy, благодаря чему уравнение $z_2 = 0$ представит плоскость орбиты. Соответствующие формулы преобразования будут иметь вид

$$\begin{cases} x = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta, & x_1 = x_2, \\ y = x_1\sin\theta + y_1\cos\theta, & y_1 = y_2\cos i - z_2\sin i, \\ z = z_1, & z_1 = y_2\sin i + z_2\cos i. \end{cases}$$

Если теперь x_2, y_2, z_2 истолковывать как координаты точки P, которые на основании определения угла v выражаются равенствами $x_2 = \rho\cos v$, $y_2 = \rho\sin v$, $z_2 = 0$, то из второй тройки уравнений преобразования мы получим

$$x_1 = \rho\cos v, \quad y_1 = \rho\sin v\cos i,$$

а из первой, разрешая уравнения относительно x_1, y_1, найдем

$$x_1 = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad y_1 = -x\sin\theta + y\cos\theta;$$

сравнивая этот результат с предыдущими формулами, найдем

$$\cos v = \frac{x}{\rho}\cos\theta + \frac{y}{\rho}\sin\theta, \quad \sin v\cos i = -\frac{x}{\rho}\sin\theta + \frac{y}{\rho}\cos\theta.$$

Если продифференцируем по θ первое из этих двух уравнений, вспоминая, что x, y и ρ не зависят от этой переменной, и примем

во внимание второе, то получим искомую формулу

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\cos i. \tag{136}$$

К тому же результату можно придти путем следующих геометрически-кинематических соображений. Для того чтобы изменить угол $v = \widehat{NOP}$, оставим неподвижной полупрямую OP и повернем полупрямую ON на угол $d\theta$ в плоскости $z = 0$, что равносильно тому, чтобы полупрямая ON осталась неподвижной, а полупрямая OP повернулась на угол $-d\theta$ вокруг оси z; это последнее элементарное вращение можно разложить на два: первое — вокруг проекции оси Oz на плоскость OPN орбиты и второе — вокруг перпендикуляра к этой плоскости.

Если через ν обозначим единичный вектор этого перпендикуляра, направленного так, что по отношению к нему движение точки P оказывается правым, то это второе вращение определится выражением $-d\theta \cos i \cdot \nu$; достаточно принять это во внимание, чтобы заметить, что первое элементарное вращение не изменит, по крайней мере до бесконечно малых порядка выше первого, угла v [1]). Отсюда следует, что изменение dv угла v можно считать соответствующим элементарному перемещению точки P

$$dP = -d\theta \cos i \cdot \nu \times \overrightarrow{OP}.$$

Если обозначим временно через t единичный вектор, перпендикулярный к OP в плоскости орбиты и направленный так, чтобы тройка векторов ν, $\overrightarrow{OP}$, t была правой, то будем иметь

$$dv = \frac{dP}{\rho} \cdot t,$$

так что на основании только что полученного выражения для dP заключаем, что

$$dv = -d\theta \cos i \left(\nu \times \frac{\overrightarrow{OP}}{\rho}\right) \cdot t$$

---

[1]) Это видно из следующего замечания. Если a, b, c суть три компланарных вектора, и мы представим себе, что один из них, например a, испытал элементарное вращение вокруг какого-нибудь другого, например b, то изменение угла, который первый образует с третьим, будет равно нулю (т. е. будет бесконечно малым порядка выше первого). Действительно, изменение da, в предположенных условиях, будет иметь вид $da = \varepsilon b \times a$, где ε есть бесконечно малая скалярная величина. Косинус угла между a и c определится выражением $a \cdot c / ac$, так что его изменение в результате рассматриваемого элементарного вращения будет равно, так как a, c остаются неизменными, $da \cdot c / ac$; достаточно принять во внимание предыдущее выражение вектора da и предположение, что три вектора вначале компланарны, чтобы убедиться что изменение угла между векторами a и c равно нулю.

или

$$dv = -d\theta \cos i$$

в согласии с формулой (136).

После этого предварительного исследования обратимся к упомянутому выше истолкованию канонических постоянных и, чтобы начать с E и G, возьмем снова уравнение (134), записывая его в виде

$$W_1'^2 = \frac{2E}{\rho^2}\left(\rho^2 + \frac{k}{E}\rho - \frac{G^2}{2E}\right). \qquad (134')$$

Так как $W_1' = p\dot{\rho}$ тождественно равно $\dot{\rho}$ (п. 6, а), то правая часть или, точнее, трехчлен второй степени в скобках должен обращаться в нуль вместе с $\dot{\rho}$, или, если иметь в виду эллиптическое движение, при всяком прохождении через один из апсидов. Далее, если обозначим, как обычно, через a и e большую полуось и эксцентриситет эллиптической орбиты, притягивающий центр которой занимает один из фокусов, то, как это известно, значения ρ в этих апсидах будут равны $a(1-e)$ для перигелия и $a(1+e)$ для афелия, так что, вычисляя сумму и произведение, мы придем к двум соотношениям

$$2a = -\frac{k}{E}, \quad a^2(1-e^2) = -\frac{G^2}{2E},$$

которые будем писать в виде

$$E = -\frac{k}{2a}, \quad G^2 = ka(1-e^2). \qquad (137)$$

В первом из них мы узнаем одно из основных соотношений между механическими постоянными и элементами орбиты, которое мы уже нашли в п. 8 гл. III; второе, если вспомнить, что $a(1-e^2)$ есть параметр p эллиптической орбиты, дает

$$G = \sqrt{kp};$$

это объясняет значение постоянной G. Если примем во внимание равенство (14) п. 6, гл. III, то еще яснее увидим, что постоянную G можно истолковать как *удвоенную секторную скорость* кеплерова движения.

Остается выяснить физический смысл постоянных g и Θ. Для выяснения физического смысла постоянной g заметим, что если при вычислении явного выражения W_1, даваемого формулой (134), примем за нижний предел интеграции расстояние перигелия $\rho_0 = a(1-e)$, т. е. если положим

$$W_1 = \int_{\rho_0}^{\rho} W_1' \, d\rho,$$

то $\partial W_1/\partial G$ обратится в нуль вместе с W_1 при $\rho = \rho_0$, как это легко получить дифференцированием под знаком интеграла. Поэтому если

применить (имея в виду выражение W из (132′)) первое из равенств (135), которое, естественно, сохраняет силу в течение всего времени движения, к прохождению через перигелий, мы получим для этого момента $v = g$, откуда видно, что g есть *аргумент долготы* движущейся точки P в перигелии (т. е. угол $\widehat{NOП}$ п. 25 гл. III).

Наконец, что касается Θ, то достаточно воспользоваться вторым из равенств (135); так как W_1 не зависит от Θ, то найдем

$$G\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\Theta,$$

или на основании формулы (136)

$$\Theta = G\cos i.$$

68. Канонические переменные Кеплера. Из уравнения (135) и из общего замечания п. 39 следует, что обе тройки аргументов

$$\begin{pmatrix} E & G & \theta \\ t-t_0 & g & -\Theta \end{pmatrix}$$

сопряжены и что соотношения

$$p_\rho = \frac{\partial W}{\partial \rho}, \quad p_\sigma = \frac{\partial W}{\partial \sigma}, \quad p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi}; \tag{131}$$

$$\frac{\partial W}{\partial G} = g, \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} = -\Theta, \quad \frac{\partial W}{\partial E} = t - t_0, \tag{135}$$

которые связывают их с переменными

$$\begin{pmatrix} p_\rho & p_\sigma & p_\varphi \\ \rho & \sigma & \varphi \end{pmatrix},$$

представляют вполне каноническое преобразование.

Как уже указывалось в п. 39, переменную $t - t_0$ удобно заменить пропорциональной ей величиной, которая вместе с θ и g имела бы размерность угла; в качестве такой величины удобно взять среднюю аномалию $l = n(t - t_0)$ (гл. III, п. 10), где согласно равенству (18′) гл. III среднее движение n выражается через большую полуось орбиты a при помощи соотношения

$$n = \frac{\sqrt{k}}{a^{3/2}}.$$

Если примем во внимание первое из равенств (137), то из формул (27) п. 14 непосредственно будет следовать, что новые шесть переменных сохранят канонический характер, если к средней

аномалии l присоединить функцию L от E или, если угодно, от a, определяемую равенством

$$dL = \frac{dE}{da}\frac{da}{n} = \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{a}}\,da,$$

т. е.

$$L = \sqrt{ka}.$$

Мы придем таким образом к новым каноническим переменным

$$\begin{pmatrix} L & G & \theta \\ l & g & -\Theta \end{pmatrix};$$

но так как l, g, θ представляют собой углы, то желательно, чтобы эти три аргумента одного и того же вида входили в одну и ту же тройку. Это будет выполнено, как это легко проверить (см. также п. 14), если шесть аргументов будут сгруппированы, как указано в таблице

$$\begin{pmatrix} L & G & \Theta \\ l & g & \theta \end{pmatrix}, \tag{138}$$

которую мы и рассмотрим теперь подробнее.

Согласно определению п. 25 гл. III речь идет о шести *эллиптических элементах*, из которых первые три, как мы видели выше, связаны с полуосью a орбиты, с эксцентриситетом e и с наклонением i уравнениями

$$L = \sqrt{ka}, \quad G = \sqrt{ka(1-e^2)}, \quad \Theta = G\cos i, \tag{139}$$

а три сопряженных с ними элемента l, g, θ обозначают соответственно среднюю аномалию, аргумент долготы перигелия и долготу восходящего узла. Из этих шести эллиптических элементов l изменяется пропорционально времени, а остальные пять остаются постоянными. Постоянное значение характеристической функции H, или на основании формулы (130) постоянная E, имеет следующее выражение в функции от этих элементов:

$$H = E = -\frac{k}{2a} = -\frac{k^2}{2L^2}. \tag{140}$$

Если в формулах (50) п. 26 гл. III представим себе, что вместо классических эллиптических элементов a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ вместе с l введены другие пять элементов из таблицы (138), то будем иметь вполне каноническое преобразование между переменными x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ (декартовы координаты и проекции скорости точки P) и новыми эллиптическими элементами (138). Аналогично тому, что было сказано в п. 26 гл. III, это преобразование можно рассматривать независимо от предположения, что движение является кеплеровым. В этом случае каждому состоянию движения x, y, z, $\dot{x}$,

$\dot{y}, \dot{z}$ сопоставляются связанные с ним шесть значений переменных (138), которые могут быть приняты за *оскулирующие элементы* в смысле, разъясненном в п. 27 гл. III, и обыкновенно называются *кеплеровыми каноническими переменными*.

Заметим, наконец, что для того, чтобы иметь явные формулы рассмотренного выше канонического преобразования, нет необходимости начинать с уравнений (131), (135), которые предполагают интегрирование уравнения Гамильтона — Якоби; удобнее обратиться к интегралам кеплерова движения, которые получаются элементарным путем, и ввести в них, вместо первоначальных эллиптических элементов, аргументы (139).

69. В некоторых приложениях небесной механики, вместо того чтобы относить формулы к единице массы, удобно ввести массу m движущейся точки. В этом предположении живая сила T и потенциал U вместе с полной энергией E умножаются на m, а каноническое выражение (T) живой силы делится на нее; если мы хотим непосредственно видеть, какие комбинации постоянных интеграции должны быть приняты за сопряженные с аргументами l, g, θ, очевидно не зависящими от m, то следует исходить вместо равенства (130) из формулы

$$\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2+\frac{1}{\rho^2}p_\sigma^2+\frac{1}{\rho^2\sin^2\sigma}p_\varphi^2\right)-\frac{km}{\rho}=Em$$

и повторить способ предыдущего пункта с соответствующими изменениями, которые потребуются вследствие введения m.

Мы быстрее получим результат, заметив, что в любой канонической системе, если характеристическая функция $H(p\,|\,q)$ умножается на постоянную m, за новые переменные можно взять mp и q. В нашем случае, когда величина E, представляющая собой постоянное значение характеристической функции, должна быть умножена на m, мы придем к новым шести кеплеровым переменным

$$\begin{pmatrix} mL & mG & m\Theta \\ l & g & \theta \end{pmatrix}. \tag{138'}$$

70. Эксцентрические и облические переменные. Среди шести переменных (138) аргументом, служащим для определения положения движущейся точки на орбите (кеплеровой или, вообще, оскулирующей), является средняя аномалия l; но иногда оказывается предпочтительнее вместо l ввести так называемую *среднюю долготу*, т. е. угол $\lambda=l+\bar{\omega}$, где $\bar{\omega}$ означает долготу перигелия, определенную в п. 25 гл. III, которая тождественна с $g+\theta$. Линейное каноническое преобразование (п. 13) позволяет тотчас же от переменных (138) перейти к новым переменным

$$\begin{pmatrix} \Lambda=L & L-G & G-\Theta \\ \lambda=l+g+\theta & -\bar{\omega}=-(g+\theta) & -\theta \end{pmatrix},$$

в которых угловыми аргументами, помимо искомой средней долготы, являются долгота перигелия и долгота восходящего узла, обе с обратным знаком. Вспоминая уравнения (139), мы видим, что новые аргументы $L-G=L(1-\sqrt{1-e^2})$, $G-\Theta=G(1-\cos i)$ пригодны, в частности, к случаям малого эксцентриситета или малого наклона, так как они исчезают соответственно при $e=0$ и при $i=0$.

Дальнейшее каноническое преобразование позволяет подставить вместо пар переменных

$$\begin{pmatrix} L-G \\ -\bar{\omega} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} G-\Theta \\ -\theta \end{pmatrix},$$

которые имеют характер полярных координат, так как один из аргументов есть угол, пары переменных (канонические переменные Пуанкаре), тоже сопряженных, но имеющих характер декартовых координат (п. 14)

$$\begin{pmatrix} \xi_1=\sqrt{2(L-G)}\cos\bar{\omega} \\ \eta_1=-\sqrt{2(L-G)}\sin\bar{\omega} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_2=\sqrt{2(G-\Theta)}\cos\theta \\ \eta_2=-\sqrt{2(G-\Theta)}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Сопряженные переменные ξ_1, η_1, исчезающие при $e=0$ (круговые орбиты), носят название *эксцентрических переменных*, а переменные ξ_2, η_2, исчезающие одновременно при $i=0$, называются *обличеcкими переменными*.

Заметим, кстати, что найдены и другие типы канонических переменных, имеющие характер кеплеровых переменных, т. е. определенным образом связанные с кеплеровым оскулирующим движением. Среди них заслуживают упоминания те, в которых единственным переменным аргументом в кеплеровом движении, вместо средней аномалии l, является эксцентрическая аномалия u [1]) или истинная аномалия v [2]).

§ 13. Основная теорема теории возмущений

71. Введение кеплеровых переменных в возмущенном движении. Предположим, как в п. 27 гл. III, что точка P, помимо преобладающего действия ньютонианского притяжения неподвижным центром O, подвергается действию некоторой возмущающей силы, являющейся производной от единичного потенциала V. В этом случае, принимая для простоты массу точки P равной 1, мы должны

[1]) T. Levi-Civita, Nuovo sistema canonico di elementi ellittici, *Ann. di Mat.* (3), т. XX, 1913; стр. 153—169.

[2]) H. Andoyer, Sur l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie comme éléments canoniques d'après M. M. T. Levi-Civita et G.-H. Hill, *Bull. Astronomique*, т. XXX, 1913, стр. 425—429.