

в которых угловыми аргументами, помимо искомой средней долготы, являются долгота перигелия и долгота восходящего узла, обе с обратным знаком. Вспоминая уравнения (139), мы видим, что новые аргументы $L - G = L(1 - \sqrt{1 - e^2})$, $G - \Theta = G(1 - \cos i)$ пригодны, в частности, к случаям малого эксцентриситета или малого наклона, так как они исчезают соответственно при $e = 0$ и при $i = 0$.

Дальнейшее каноническое преобразование позволяет подставить вместо пар переменных

$$\left(\begin{array}{c} L - G \\ -\omega \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} G - \Theta \\ -\theta \end{array} \right),$$

которые имеют характер полярных координат, так как один из аргументов есть угол, пары переменных (канонические переменные Пуанкаре), тоже сопряженных, но имеющих характер декартовых координат (п. 14)

$$\left(\begin{array}{c} \xi_1 = \sqrt{2(L - G)} \cos \bar{\omega} \\ \eta_1 = -\sqrt{2(L - G)} \sin \bar{\omega} \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} \xi_2 = \sqrt{2(G - \Theta)} \cos \theta \\ \eta_2 = -\sqrt{2(G - \Theta)} \sin \theta \end{array} \right).$$

Сопряженные переменные ξ_1, η_1 , исчезающие при $e = 0$ (круговые орбиты), носят название *эксцентрисических переменных*, а переменные ξ_2, η_2 , исчезающие одновременно при $i = 0$, называются *облическими переменными*.

Заметим, кстати, что найдены и другие типы канонических переменных, имеющие характер кеплеровых переменных, т. е. определенным образом связанные с кеплеровым оскулирующим движением. Среди них заслуживают упоминания те, в которых единственным переменным аргументом в кеплеровом движении, вместо средней аномалии l , является эксцентрическая аномалия u ¹⁾ или истинная аномалия v ²⁾.

§ 13. Основная теорема теории возмущений

71. Введение кеплеровых переменных в возмущенном движении. Предположим, как в п. 27 гл. III, что точка P , помимо преобладающего действия ньютонианского притяжения неподвижным центром O , подвергается действию некоторой возмущающей силы, являющейся производной от единичного потенциала V . В этом случае, принимая для простоты массу точки P равной 1, мы должны

¹⁾ T. Levi-Civita, Nuovo sistema canonico di elementi ellittici, *Ann. di Mat.* (3), т. XX, 1913; стр. 153—169.

²⁾ H. Andoyer, Sur l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie comme éléments canoniques d'après M. M. T. Levi-Civita et G.-H. Hill, *Bull. Astronomique*, т. XXX, 1913, стр. 425—429.

будем определить движение канонической системы с характеристической функцией

$$H = H_0 - V,$$

где H_0 обозначает характеристическую функцию, которая входит в уравнение (130) и соответствует *невозмущенному движению*, а V есть так называемая *пертурбационная функция*.

В качестве неизвестных мы прежде всего могли бы взять здесь те переменные, которые определяют состояние движения (положение и скорость) точки P , т. е. переменные x, y, z и $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ или переменные $p_\rho, p_\sigma, p_\varphi$ и ρ, σ, φ , соответствующие полярным координатам.

Но в этой задаче лучше ввести согласно указаниям в конце п. 68 кеплеровы переменные (138), относительно которых можно предложить, что L, G, Θ, g, θ изменяются, оставаясь близкими к тем постоянным значениям, которые они имели бы в невозмущенном движении (кеплеровом), а изменение l , которое в этом последнем движении было бы пропорционально $t - t_0$, будет немного отличаться от равномерного изменения.

Так как преобразование между первоначальными переменными и переменными (138) является вполне каноническим, то преобразованные уравнения будут также каноническими, а новая характеристическая функция получится просто путем выражения первоначальной функции H через кеплеровы переменные. Так как на основании формул (140) имеем

$$H = -\frac{k^2}{2L^2} - V, \quad (141)$$

то преобразованные уравнения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial l}, & \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial g} = \frac{\partial V}{\partial g}, \\ \frac{d\Theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \theta}; \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial L} = n - \frac{dV}{dL}, & \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial G} = -\frac{\partial V}{\partial G}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Theta} = -\frac{\partial V}{\partial \Theta}. \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

72. Воздушения первого порядка. До тех пор пока не делается никакого предположения о функции V , преобразованная система (142) не представляет, конечно, никакого преимущества по сравнению с первоначальной; дело, однако, будет обстоять иначе, если, как это предполагается с самого начала, слагаемое V есть простая пертурбационная функция, т. е., по существу, остается малой по сравнению с первым слагаемым H_0 . Это, в частности, будет иметь место, если отношение $V : H_0$ можно рассматривать как количество первого порядка,

например, если V будет вида $-eH_1$, где функция H_1 сравнима с H_0 , а e есть очень малая численная постоянная. С обстоятельствами такого рода мы встречаемся в случае планетной системы, когда, фиксируя внимание на некоторой планете P , рассматриваем Солнце как центральное тело, так что потенциал V происходит от притяжения других планет. Так как взаимные расстояния сравнимы, а масса Солнца, наоборот, значительно больше массы планеты, то отношение $V:H_0$ в этом случае будет того же порядка величины, что и очень малое отношение между массой возмущающих планет и массой Солнца.

Обращаясь теперь к канонической системе (142), заметим, что первое слагаемое H_0 характеристической функции H зависит исключительно от аргумента L . Чтобы выяснить, какую выгоду можно извлечь из этого обстоятельства в отношении определения возмущенного движения, обобщим постановку задачи, обращаясь к канонической системе с n степенями свободы и с характеристической функцией $H = H_0 - V$; предполагая функцию V бесконечно малой по сравнению с H_0 , допустим еще, что это первое слагаемое зависит только от переменных одного из двух рядов, например только от p . Речь, следовательно, будет идти о системе вида

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial (H_0 - V)}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (142')$$

частным случаем которой являются уравнения (142).

Для невозмущенного движения, когда нет возмущающего воздействия пертурбационной функции V , законы движения определяются равенствами

$$p_i = \bar{p}_i, \quad q_i = \bar{q}_i = n_i t + q_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где \bar{p}_i , \bar{q}_i^0 суть $2n$ произвольных постоянных и через n_i для краткости обозначены постоянные

$$\left(\frac{\partial H_0}{\partial p_i} \right)_{p=\bar{p}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Поэтому в возмущенном движении, если V бесконечно мало по сравнению с H_0 , величины p_i , q_i можно представить в виде

$$p_i = \bar{p}_i + \delta p_i, \quad q_i = \bar{q}_i + \delta q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где величины δp_i , δq_i представляют функции от t , бесконечно малые, как и функция V , и называются *возмущениями* или *неравенствами первого порядка*. Для определения их подставим предыдущие выражения в уравнения (142') и примем во внимание, что \bar{p}_i , \bar{q}_i , по определению, будут удовлетворять уравнениям, которые получатся из уравнений (142'), если положить в них $V=0$, и что, так как V уже является бесконечно малой, функция $V(p|q)$ отличается от $V(\bar{p}|\bar{q})$ только на бесконечно малые порядка выше первого, что будет

относиться также и к соответствующим производным. Вводя эти приближения, получим для определения $\delta p_i, \delta q_i$ уравнения в вариациях (ср. гл. IV, п. 19)

$$\frac{d\delta p_i}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{q}_i}, \quad \frac{d\delta q_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{p}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (143)$$

где черта сверху стоит для указания, что в производных от V вместо p, q надо подставить их невозмущенные значения \bar{p}, \bar{q} .

Так как теперь правые части будут известными функциями от одного только независимого переменного t , то мы будем иметь следующую основную теорему:

Если известно невозмущенное движение, то возмущения первого порядка определяются простыми квадратурами.

73. Возмущения, происходящие от притяжения третьим телом. Предположим, что точка P , о которой идет речь, подвергается, помимо притяжения центра O , еще и притяжению третьего тела P' , и постараемся учесть, как это делается в классической задаче трех тел, тот факт, что точки O, P, P' попарно взаимно притягивают друг друга. Для движения точки P относительно точки O попережнему будут иметь силу уравнения (142'), но в этом случае возмущающая функция V будет зависеть не только от P , но также и от P' ; задача будет определена, как на это уже указывалось в пп. 47, 48, если к шести уравнениям относительного движения точки P присоединить аналогичные уравнения для относительного движения точки P' .

Однако, если будем иметь в виду значение возмущений первого порядка, в смысле, разъясненном в предыдущем пункте, то движение возмущающего тела P' можно рассматривать непосредственно как кеплерово, так как отклонения действительного движения от невозмущенного, которые сами по себе должны приниматься как отклонения первого порядка, могут прибавить к возмущениям точки P только слагаемое более высокого порядка.

Если в качестве параметров, определяющих состояние движения (невозмущенного) точек P, P' , принимаются соответствующие эллиптические канонические элементы

$$\left(\begin{array}{c} \bar{L} \bar{G} \bar{\theta} \\ \bar{l} \bar{g} \bar{\theta} \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} \bar{L}' \bar{G}' \bar{\theta}' \\ \bar{l}' \bar{g}' \bar{\theta}' \end{array} \right),$$

то функция возмущения V в конце концов будет зависеть известным образом от t через посредство только двух аргументов $\bar{t} = n(t - t_0)$, $\bar{l}' = n'(t - t_0)$, так что остальные десять элементов будут постоянными. То же будет иметь место и для частных производных от V , появляющихся в правых частях уравнений вида (143), которые определяют возмущения первого порядка $\delta L, \delta G, \dots, \delta \theta$; поэтому,

обозначая через f одно какое-нибудь из этих возмущений, мы можем сказать, что все эти уравнения будут иметь вид

$$\frac{df}{dt} = F(\bar{l}, \bar{l}'). \quad (144)$$

Если мы примем во внимание, что переменные \bar{l} , \bar{l}' являются аномалиями и что если \bar{l} или \bar{l}' возрастает на 2π , точка P или P' снова занимает то же самое положение на соответствующей оскулирующей орбите, так что функция V и, следовательно, функция F должны оставаться неизменными, то увидим, что эта последняя функция должна быть периодической с периодом 2π по отношению к каждому из своих аргументов.

Здесь важно исследовать, как такая периодичность функции F отражается на характере возмущения f , определяемого равенством (144). Для этой цели достаточно использовать основное свойство периодических функций, обладающих производной (вообще говоря, непрерывной), заключающееся в возможности разложения их в ряд Фурье, абсолютно и равномерно сходящийся.

Принимая во внимание прежде всего периодичность функции относительно аргумента \bar{l}' , можно написать

$$F = [F] + \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j \cos j\bar{l}' + \psi_j \sin j\bar{l}'), \quad (145)$$

где

$$[F] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F d\bar{l}' \quad (146)$$

представляет среднее значение F относительно \bar{l}' в интервале от 0 до 2π и поэтому означает наравне с каждой из функций φ_j , ψ_j некоторую функцию одного только аргумента \bar{l}' , периодическую с периодом 2π .

Если к обеим функциям φ_j , ψ_j применить разложение в ряд Фурье и принять во внимание хорошо известные гониометрические тождества, то сумма в правой части равенства (145) преобразуется в двойную сумму членов типа

$$a_{ij} \cos(i\bar{l}' + i\bar{l}') + b_{ij} \sin(i\bar{l}' + j\bar{l}'), \quad (147)$$

где a_{ij} , b_{ij} суть постоянные, и индексы i , j означают числа (положительные или отрицательные), второе из которых всегда отлично от нуля, как это видно из равенства (145).

Если мы будем придерживаться более общего предположения, что средние движения n и n' несоизмеримы между собой, то будет исключена возможность, что бином $in + jn'$ при каком угодно выборе целых чисел i , j при $j \neq 0$ может обратиться в нуль. Поэтому, когда

над F будет выполнена квадратура по t , которая на основании уравнения (144) дает возмущение f , суммирование, появляющееся в выражении (145) для F , приводит к двойной сумме членов вида

$$\frac{a_{ij}}{in+jn'} \sin(i\bar{l}+j\bar{l}') - \frac{b_{ij}}{in+jn'} \cos(i\bar{l}+j\bar{l}'), \quad (148)$$

которые составят еще столько периодических функций от \bar{l} и \bar{l}' , сколько имеется периодов, отличных один от другого.

Таким образом, если разложим в ряд Фурье первый член $[F]$ в правой части равенства (145), то придем к выражению вида

$$[F] = [[F]] + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos i\bar{l} + b_i \sin i\bar{l}), \quad (149)$$

где $[[F]]$ и a_i, b_i обозначают постоянные, причем $[[F]]$ есть среднее значение $[F]$ относительно \bar{l} в интервале от 0 до 2π , т. е., на основании равенства (146),

$$[[F]] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [F] d\bar{l} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\bar{l} \int_0^{2\pi} F d\bar{l}'.$$

Интегрируя почленно по t разложение (149) функции $[F]$, заключаем, что возмущение f складывается из двойной суммы членов вида (148), суммы функций, тоже периодических относительно времени,

$$\frac{a_i}{in} \sin i\bar{l} - \frac{b_i}{in} \cos i\bar{l} \quad (i > 0) \quad (150)$$

и непериодического члена

$$[[F]] t. \quad (151)$$

Слагаемые вида (148), (150), (151) называются *неравенствами*, так как в результате наложения их друг на друга они определяют возмущение; точнее, члены тригонометрического вида (148), (150) называются *периодическими неравенствами*, а член (151), который с течением времени изменяется всегда в одном и том же смысле и поэтому в конце концов превосходит остальные, называется *вековым неравенством*.

Относительно периодических неравенств достаточно заметить, что для любого из слагаемых (148) период определяется выражением $2\pi/(in+jn')$, чтобы понять, как в численной теории возмущений представляется в виде аномалий так называемые случаи квазисоизмеримости между средними движениями, т. е. случаи, в которых отношение n/n' приблизительно равно дроби с малыми числителем и знаменателем. Действительно, в этом предположении среди первых членов разложения возмущения, т. е. как раз среди тех членов, которые

надо учитывать в численных выкладках, входят неравенства с очень большим периодом, и те, которые соответствуют наибольшим возмущениям, имеют очень маленький знаменатель ($in + jn'$, если — i/j есть величина, очень близкая к n/n').

74. Теорема Гаусса. Из предшествующего следует, что вековое неравенство, относящееся к любому элементу, целиком происходит от среднего значения $[F]$; поэтому по отношению к этому неравенству все обстоит так, как если бы вместо потенциала V возмущающей силы было подставлено его среднее значение

$$[V] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V d\bar{l}'.$$

В случае задачи трех тел потенциал V , так как он происходит исключительно от ньютонианского притяжения тела P' , можно написать в виде $m'V_1$, где m' есть масса P' и V_1 обозначает потенциал, который мы имели бы при прочих равных условиях, если бы тело P' имело массу, равную единице.

Представим себе теперь, что вдоль эллиптической (невозмущенной) орбиты точки P' будет распределена вся масса m' точки P' с линейной плотностью, пропорциональной соответствующим временам пробега, т. е. таким образом, что на дуге, вдоль которой средняя аномалия \bar{l}' изменяется на $d\bar{l}'$, расположена масса

$$\frac{m'd\bar{l}'}{2\pi}.$$

Так как для кеплерова движения имеет место закон площадей, то можно также сказать, что эта линейная плотность пропорциональна площадям секторов, имеющих вершину в центре притяжения.

Так как очевидно, что средняя величина $[V]$ будет не чем иным, как ньютоновым потенциалом определенного таким образом эллиптического материального кольца, то имеем следующую теорему Гаусса:

Вековые неравенства, происходящие от возмущающего тела P' , можно оценивать, представляя себе, что вся масса возмущающего тела распределена вдоль невозмущенной орбиты этого тела пропорционально временам пробега или, что то же самое, пропорционально площадям секторов, имеющих вершину в центре притяжения.

75. Неизменность больших осей. Другим важным следствием рассуждений п. 73 будет замечание, принадлежащее Лапласу, что в первом приближении эллиптический элемент $L = \sqrt{k}ae$, а вместе с ним и большая ось орбиты не имеют векового неравенства.

Чтобы убедиться в этом, возьмем снова то из дифференциальных уравнений, которое определяет соответствующее возмущение δL , т. е. уравнение

$$\frac{d\delta L}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t},$$

и вспомним, что возможное вековое неравенство происходит исключительно от среднего значения правой части по отношению к \bar{l} в интервале от 0 до 2π . Так как это среднее значение можно написать в виде

$$\frac{\partial}{\partial l} [\bar{V}]$$

и $[\bar{V}]$ зависит только от t через посредство $\bar{l} = n(t - t_0)$, то очевидно, что неопределенный интеграл относительно t от только что написанной производной, по крайней мере с точностью до аддитивной постоянной, равен

$$\frac{1}{n} [\bar{V}],$$

и поэтому является периодической функцией времени.

Важно добавить еще, что так как для какой-нибудь функции q одного только элемента a , каковым, например, является среднее движение $n = k^{1/2}/a^{3/2}$, возмущение δq при том же порядке приближения определяется равенством

$$\delta q = \frac{dq}{da} \delta a,$$

то отсутствие векового неравенства для элемента a влечет за собой аналогичное свойство для всякой такой функции q и, следовательно, в частности, для среднего движения.

76. Рассуждения, совершенные аналогичные рассуждениям п. 73, имеют место также и для задачи $n+1$ тел, когда любое тело P подвергается, помимо преобладающего действия центрального тела O , возмущающим притяжениям остальных $n-1$ тел P' , P'' , ... Для каждой из этих возмущающих сил имеется потенциал V типа, рассмотренного в предыдущих пунктах. Если ограничиться, как и выше, первым приближением, то для дифференциального уравнения вида (143) будет иметь место распределительное свойство в том смысле, что возмущение любого эллиптического элемента точки P будет суммой возмущений, вызванных каждым отдельным возмущающим телом. При этом предполагается, что каждое из этих тел, как и рассмотренное выше отдельное тело, имеет эллиптическое движение, которое оно имело бы, если бы отсутствовали все остальные тела, за исключением центрального.