УПРАЖНЕНИЯ

1. Функция Гамильтона для материальной точки (массы 1), движущейся под действием силы, имеющей потенциал U (который может зависеть также и от времени) и отнесенной к осям $Ox_1x_2x_3$, равномерно вращающимся вокруг оси Ox_3 с угловой скоростью ω, определяется равенством

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)-\omega(x_1p_2-x_2p_1)-U.$$

2. Показать, что если функция Лагранжа $\mathfrak{L}(q\mid\dot{q}\mid t)$ является относительно $\dot{q}$ однородной степени $m\neq 1$, то соответствующая функция Гамильтона H будет однородной относительно p степени $m/(m-1)$. Проверить это. Как мы видим, при $m=2$ функция H будет также однородной второй степени относительно v.

3. Смешанные уравнения Рауса. Эти уравнения получаются из уравнений Лагранжа, если выполнить только частично преобразование Гамильтона (§ 1).

Функция Лагранжа $\mathfrak{L}(q\mid\dot{q}\mid t)$ зависит, как обычно, от n координат и, конечно, от n их производных $\dot{q}$. Положив только для части индексов, например для первых $m<n$,

$$v_h=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_n}\qquad(h=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

предположим, что эти m уравнений разрешимы относительно $\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_m$ в виде

$$\dot{q}_h=u_h(p_1,\ \ldots,\ p_m;\ \dot{q}_{m+1},\ \ldots,\ \dot{q}_n\mid q\mid t)\qquad(h=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

и введем, следуя Раусу, функцию

$$\mathfrak{R}=\sum_{h=1}^{m}p_k\dot{q}_h-\mathfrak{L};$$

если $\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_m$ будем предполагать замененными соответствующими выражениями, то $\mathfrak{R}$ будет функцией от аргументов

$$q\mid p_1,\ \ldots,\ p_m;\ \dot{q}_{m+1},\ \ldots,\ \dot{q}_n\mid t.$$

Доказать способом, аналогичным способу п. 1, что справедливы тождества

$$u_h=\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial p_h}\qquad(h=1,\ 2,\ \ldots,\ m);\quad -\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\alpha}\right)_{\dot{q}=u}=\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\alpha},$$

где α есть какой-нибудь из аргументов q или $\dot{q}_{m+1},\ \ldots,\ \dot{q}_m$, и вывести отсюда, что система n уравнений второго порядка

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_i}=0\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

равносильна системе $n+m$ уравнений (из которых $2m$ первого порядка и $n-m$ второго) относительно такого же числа неизвестных функций $q_1,\ldots,q_n$, $p_1,\ \ldots,\ p_m$

$$\frac{dp_h}{dt}=-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial q_h},\quad\frac{dq_h}{dt}=\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial p_h}\qquad(h=1,\ 2,\ \ldots,\ m);$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\dot{q}_{m+j}}-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial q_{m+j}}=0.\qquad(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-m),$$

Подобно лагранжевым системам, с одной стороны, и системам Гамильтона — с другой, эта система уравнений зависит тоже от одной-единственной функции $\mathfrak{R}$. Ее можно назвать гамильтоновой относительно переменных $q_1, q_2, \ldots, q_m$ и соответствующих количеств движения p и лагранжевой относительно остальных q.

4. В виде применения результата предыдущего упражнения рассмотреть случай, когда координаты $q_1, \ldots, q_m$ не входят явно в $\mathfrak{L}$ и являются, следовательно, игнорируемыми; проверить, что:

1) количества движения $p_1, \ldots, p_m$ будут постоянными; лагранжева часть смешанной системы Рауса, в которой надо положить $p_h = \text{const}$, представляет собой систему, содержащую только неизвестные функции $q_{m+1}, \ldots, q_n$;

2) после определения на основании этой последней системы функций $q_{m+1}, \ldots, q_n$ можно получить остальные $q_1, \ldots, q_m$ посредством квадратур.

Ср. гл. V, п. 45.

5. Положим для краткости

$$\pi^2 = \sum_{i=1}^{3} \pi_i^2, \qquad \Omega = -2 \sum_{i=1}^{3} \pi_i \varkappa_i$$

и рассмотрим преобразование между двумя рядами переменных

$$\begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi_i \\ \varkappa_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

определяемое равенствами

$$q_i = \pi^2 \varkappa_i + \Omega \pi_i,$$

$$p_i = \frac{\pi_i}{\pi^2} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Доказать, что это преобразование является вполне каноническим, поскольку из предыдущих формул следует

$$\sum_{i=1}^{3} p_i \, dq_i = \sum_{i=1}^{3} \pi_i \, d\varkappa_i + d\Omega.$$

Такое преобразование, естественное в задаче двух тел, в случае параболического движения служит для устранения особенностей, которые появляются в уравнениях движения, относящихся к задаче трех тел, когда два из них стремятся бесконечно сблизиться (столкновение двух тел). Геометрическое и кинематическое истолкование таких преобразований см. T. Levi-Civita, *Acta math.*, т. 42, 1918, гл. II, стр. 118—132.

6. Какие угодно преобразования канонической системы. Если вместо n сопряженных переменных p и q подставить $2n$ каких угодно независимых комбинаций этих же переменных p, q (вообще говоря, неканонических) $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$, полагая

$$p_h = \varphi_h(z \mid t), \quad q_h = \psi_h(z \mid t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

то каноническая система

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \quad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

после преобразования принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial z_k} + [z_k, t] + \sum_{j=1}^{2n} [z_k, z_j] \dot{z}_j = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n),$$

где подразумевается, что H выражена в функции от z, а [ ] означают, как обычно, скобки Лагранжа, определенные в п. 15. Проверяется непосредственно. См. также H. Andoyer, Cours de Mécanique céleste, т. I, Paris, 1923, стр. 28.

7. Интегральные инварианты линии. Доказать, что условия, которым должны удовлетворять n функций $\xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid t)$ для того, чтобы криволинейный интеграл

$$J = \int_L \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, dx_i,$$

распространенный на произвольную линию (субстанциальную), даже незамкнутую, был инвариантом относительно системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

определяются равенствами

$$\frac{d\xi_i}{dt} + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти интегральные инварианты, действительные для каких угодно кривых, замкнутых или незамкнутых, называются *абсолютными*, в противоположность *относительным*, которые имеют инвариантный характер только для замкнутых линий интегрирования, пример которых мы дали в п. 34.

8. В виде приложения предыдущего упражнения доказать, что для канонических систем с характеристической функцией, не зависящей от t и однородной первой степени относительно p, криволинейный инвариант

$$\int_L \sum_{h=1}^{n} p_h \, dq_h$$

есть *абсолютный* инвариант (тогда как для любой канонической системы он будет только относительным).

9. Дана каноническая система с характеристической функцией $H(p \mid q)$, не зависящей от t; выберем в фазовом пространстве Φ_{2n} любую изоэнергетическую гиперповерхность $H = E$ и, предположив, что H содержит, по крайней мере, одно из p, например p_n, представим себе уравнение $H = E$ разрешенным относительно p_n в виде

$$p_n = \varphi(q \mid p_1, p_2, \ldots, p_{n-1} \mid E).$$

Доказать, что интеграл

$$G = \int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial E} dq_1 \, dq_2 \ldots dq_n dp_1 dp_2 \ldots dp_{n-1},$$

распространенный на какую-нибудь (субстанциальную) область σ рассматриваемой изоэнергетической поверхности, является инвариантом (абсолютным).

Достаточно заметить, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial E}=\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial p_h}},$$

и применить к дифференциальной системе, порядок которой после понижения при помощи интеграла энергии $H=E$ равен $(2n-1)$.

10. Гамильтоновы преобразования в случае лагранжевой функции, не зависящей от t и однородной первой степени относительно $\dot{q}$. В п. 41 гл. V мы имели случай заметить, что если функция $\mathfrak{L}(q\,|\,\dot{q}\,|\,t)$ является однородной первой степени относительно $\dot{q}$, то лагранжева система

$$\mathfrak{L}_h\equiv\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_h}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_h}=0\qquad(h=1,2,\ldots,n),\quad(1)$$

наверное, не будет нормальной; если, кроме того, функция $\mathfrak{L}$ не зависит от t, то справедливо тождество

$$\sum_{h=1}^{n}\dot{q}_h\mathfrak{L}_h=0.$$

Если существует эта зависимость, то к системе (1) можно присоединить какое-нибудь новое уравнение с n неизвестными функциями $q(t)$; как увидим далее (ср. упражнение 13), представляет интерес, в частности, случай, когда в виде добавочного уравнения принимается соотношение $\mathfrak{L}=1$. Если бы мы приняли функцию $\mathfrak{L}$ равной какой-нибудь постоянной, не равной нулю, то можно было бы эту постоянную принять за единицу, деля уравнения (1) и, следовательно, $\mathfrak{L}$ на $\mathfrak{L}_0$. Назовем *системой Гюйгенса* (оправдание такого названия отложим до упомянутого упражнения 13) систему

$$\mathfrak{L}_h=0,\quad\mathfrak{L}=1\qquad(h=1,2,\ldots,n).\quad(2)$$

Если положим теперь $\mathfrak{M}\equiv\mathfrak{L}^2/2$ и примем $\mathfrak{M}$ за новую функцию Лагранжа, то без труда увидим (проверку предоставляем читателю), что система

$$\mathfrak{M}_h\equiv\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\dot{q}_h}-\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial q_h}=0,\quad 2\mathfrak{M}=1\quad(h=1,2,\ldots,n)\quad(2')$$

равносильна системе (2). Необходимо заметить, что, так как $\mathfrak{L}$ является однородной функцией первой степени относительно $\dot{q}$, $\mathfrak{M}$ будет однородной функцией второй степени относительно тех же аргументов и что, вообще говоря, ее гессиан не будет тождественно равен нулю. В этом последнем обстоятельстве можно убедиться на примере, который, впрочем, важен сам по себе, полагая $\mathfrak{L}=\sqrt{2T}$, где T означает определенную положительную квадратичную форму относительно $\dot{q}$, каковой является живая сила голономной системы со связями, не зависящими от времени.

Если гессиан функции $\mathfrak{M}$ не равен нулю, то к системе (2′) будет применимо гамильтоново преобразование (п. 1), в силу которого n лагранжевых уравнений, которые вместе с добавочным уравнением $2\mathfrak{M}=1$ образуют

систему (2′), преобразуются в гамильтонову систему. Характеристическая функция этой системы определяется равенством

$$K(p \mid q) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathfrak{M},$$

где переменные p_i определяются из соотношений

$$p_i = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

или, в силу того, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}^2/2$ и $\mathfrak{L} = 1$, из соотношений

$$p_i = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (3)$$

Так как $\mathfrak{M}$ есть однородная функция второй степени относительно $\dot{q}$, то уравнение, определяющее K, приводится к виду

$$K(p \mid q) = \mathfrak{M}(q \mid \dot{q});$$

с другой стороны (упражнение 2), функция K будет однородной второй степени относительно p.

В силу этого соотношение $2\mathfrak{M} = 1$ преобразуется в другое соотношение $2K = 1$, поэтому система (2′), а потому и первоначальная система Гюйгенса (2) равносильны системе

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial K}{\partial q_h}, \quad \dot{q}_h = \frac{\partial K}{\partial p_h}, \quad 2K = 1 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \quad (2'')$$

Но можно сделать следующий шаг, полагая $H = \sqrt{2K}$, в силу чего функция $H(p \mid q)$ *совпадет с первоначальной* функцией $\mathfrak{L}(q \mid \dot{q})$, из которой исключены $\dot{q}$ при помощи соотношений (3) и уравнения $\mathfrak{L} = 1$, а с другой стороны, она будет однородной первой степени относительно p. После этого легко проверить, что система (2″), а следовательно, также и первоначальная система (2) равносильны системе

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \quad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}, \quad H = 1 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n); \quad (2''')$$

отсюда мы заключаем, что в исключительном случае, когда функция $\mathfrak{L}$ не зависит от времени и является однородной первой степени относительно $\dot{q}$, достаточно присоединить к соответствующей лагранжевой системе, самой по себе не являющейся нормальной, уравнение $\mathfrak{L} = 1$, чтобы сделать возможным гамильтоново преобразование. Характеристическая функция H, к которой мы таким образом приходим, будет не чем иным, как первоначальной функцией $\mathfrak{L}$, выраженной посредством p при помощи соотношений (3) и уравнения $\mathfrak{L} = 1$. Рассматриваемая система равносильна гамильтоновой системе, соответствующей функции H, вместе с уравнением $H = 1$.

Надо заметить, что, в то время как для гамильтоновой системы уравнение $H = 1$ является первым интегралом, в котором произвольная постоянная имеет частное значение (интеграл обобщенной энергии), равенство $\mathfrak{L} = 1$, которое мы присоединили, не будет первым интегралом для лагранжевой системы.

Наконец, так как H является однородной функцией первой степени относительно p, то уравнение $H=1$ можно написать также в виде

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \frac{\partial H}{\partial p_h} = \sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h = 1; \tag{4}$$

это равенство нам пригодится, когда мы будем рассматривать упражнение 13.

11. Канонические однородные системы. Этим названием мы будем обозначать канонические системы с характеристической функцией, не зависящей от t и однородной первой степени относительно p. К системам такого типа мы пришли в предыдущем упражнении. Здесь, независимо от их происхождения, мы укажем на одно их важное свойство.

В п. 35 мы видели, что общее решение

$$p_h = p_h(t \mid p^0 \mid q^0), \quad q_h = q_h(t \mid p^0 \mid q^0) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

в котором за постоянные интегрирования какой-нибудь канонической системы приняты количества движения p^0 и координаты q^0, соответствующие начальному моменту, определяет каноническое преобразование между сопряженными величинами p^0, q^0 и p, q, т. е. влечет за собой тождество вида

$$\sum_{h=1}^{n} p_h\, dq_h = \sum_{h=1}^{n} p_h^0\, dq_h^0 + H_0\, dt + d\Omega,$$

где H_0 и Ω обозначают две функции от $4n+1$ аргументов p, q, p^0, q^0 и t. Покажем теперь, что в случае характеристической функции $H(p \mid q)$, не зависящей от t и однородной первой степени относительно p, указанное выше каноническое преобразование является однородным, т. е. (п. 18) влечет за собой тождество

$$\sum_{h=1}^{n} p_h\, dq_h = \sum_{h=1}^{n} p_h^0\, dq_h^0. \tag{5}$$

Для доказательства этого утверждения, вместо того чтобы начинать, как в п. 35, с интегральных формул, даваемых методом Гамильтона — Якоби, заметим, что равенство (5) выражает инвариантность пфаффиана

$$\sum_{h=1}^{n} p_h\, dq_h$$

при изменении в нем величин p и q, рассматриваемых как функции t, определенные гамильтоновой системой. Поэтому достаточно доказать, что в силу соотношений

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \quad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

производная по t от указанного пфаффиана будет тождественно равна нулю.

Для этой цели прежде всего удобно сохранить символ d для дифференцирования по времени и обозначить через δq_h^0 произвольные приращения начальных координат q^0, через δq_h — приращения координат q на основании их интегральных выражений. В силу этого пфаффиан, инвариантность которого нужно доказать, будет иметь вид

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h;$$

с другой стороны, оба оператора d и δ, как относящиеся к независимым переменным, будут обладать свойством переместительности. Таким образом, мы имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h\right) = \sum_{h=1}^{n} (\dot{p}_h \delta q_h + p_h \delta \dot{q}_h)$$

или на основании канонической системы

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h\right) = \sum_{h=1}^{n}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_h}\delta q_h + p_h \delta \frac{\partial H}{\partial p_h}\right). \tag{6}$$

Но в силу предположенной однородности мы имеем

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \frac{\partial H}{\partial p_h} - H = 0;$$

а отсюда, применяя оператор δ и делая обычные приведения, мы выводим соотношение

$$\sum_{h=1}^{n}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_h}\delta q_h + p_h \delta \frac{\partial H}{\partial p_h}\right) = 0,$$

которое при сопоставлении с равенством (6) доказывает утверждение.

Заметим, что это является только иной формой результата, полученного в упражнении 8.

12. Доказать, что для однородной канонической системы (предыдущее упражнение) существенными являются только отношения количеств движения p в том смысле, что двум начальным фазам, определяемым одними и теми же координатами q_h^0 и количествами движения p_h^0, ρp_h^0, пропорциональными между собой, соответствуют решения, для которых в любой момент координаты совпадают, а моменты остаются пропорциональными между собой с тем же коэффициентом пропорциональности ρ.

13. Геометрическая теория световых волн[1]. а) *Элементы пространства конфигураций.* Будем рассматривать $q_1, q_2, \ldots, q_n$ как ортогональные декартовы координаты евклидова пространства Γ_n n измерений, как мы делали это в п. 61 гл. V. В уравнении любой гиперплоскости π

$$\sum_{h=1}^{n} p_h q_h = C$$

постоянные p_h и C, как известно, пропорциональны соответственно направляющим косинусам α_h нормали ν к π и расстоянию w гиперплоскости π от

[1]) Lie, Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Mechanik, *Leipz. Ber.*, 1889, стр. 277—289. Lie—Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig, 1896, стр. 16, 97, 102. Vessiot, Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales, *Bull. de la Soc. math. de France*, т. XXXIV, 1906, стр. 230—269.

начала (коэффициентам нормального уравнения плоскости). Для определенного направления ν имеем

$$\alpha_h = \frac{p_h}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}} \quad (h = 1, 2, \ldots, n); \qquad w = \frac{C}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}};$$

постоянные α можно принять за координаты гиперплоскости π (число их равно $(n+1)$, но они связаны известным соотношением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$).

Известно также, что для гиперповерхности V_{n-1}, уравнение которой имеет вид

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0, \tag{7}$$

уравнение касательной гиперплоскости в данной точке $\bar{q}_h$ будет

$$\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_h}\right)_{q=\bar{q}} (q_h - \bar{q}_h) = 0,$$

так что для направляющих косинусов α_h нормали ν к гиперповерхности V_{n-1} в точке $\bar{q}_h$ и для расстояния w касательной гиперплоскости от начала будем иметь выражения

$$\alpha_h = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial q_h}\right)_{q=\bar{q}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)^2_{q=\bar{q}}}} \quad (h = 1, 2, \ldots, n); \qquad w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{q}_i. \tag{8}$$

Эти $n+1$ уравнений, если $\bar{q}$ рассматриваются в них как избыточные параметры, связанные равенством (7), дают параметрическое представление гиперповерхности V_{n-1}, как огибающей гиперплоскостей.

Но очевидно также, что (по крайней мере внутри некоторой области изменения) всякой полупрямой с направляющими косинусами α_h, выходящей из начала, однозначно соответствует на гиперповерхности V_{n-1} некоторое значение для точки соприкосновения гиперплоскости, касательной к V_{n-1} и перпендикулярной к рассматриваемой прямой; достаточно представить себе в последнем из равенств (8) все $\bar{q}$ выраженными через α_h для того, чтобы иметь соотношение между α_h и w, которое определяет гиперповерхность V_{n-1} как огибающую гиперплоскостей и представляет собой так называемое *тангенциальное уравнение* гиперповерхности V_{n-1}.

После этих предварительных замечаний перенесем в пространство Γ_n определение элемента, данное в п. 18 для пространства $n+1$ измерений, т. е. будем называть элементом совокупность точки P и гиперплоскости π, проходящей через нее (или, если мы хотим иметь более наглядное геометрическое изображение, области гиперплоскости π (площадки в окрестности точки P)). В качестве координат любого элемента F здесь можно принять декартовы координаты q его центра P и направляющие косинусы α_h нормали ν к π, или постоянные p_h, пропорциональные направляющим косинусам α_h.

В координатах q, p *условие соединения* двух бесконечно близких элементов q, p и $q+\delta q$, $p+\delta p$ (т. е. условие, необходимое и достаточное для того, чтобы центр второго элемента лежал на гиперплоскости первого) принимает вид

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h = 0; \tag{9}$$

в пространстве Γ_n, по теореме Ли, приведенной в п. 18, наибольшая размерность многообразий соединенных элементов есть $n-1$. Эти многообразия ∞^{n-1} соединенных элементов разделяются на n категорий, различающихся между собой по размерности (точечного) основания или геометрического места центров соответствующих элементов, которое изменяется от минимума 0 (соответственно связке элементов с заданным общим центром) до максимума $n-1$ (соответственно многообразиям ∞^{n-1} элементов одной и той же гиперповерхности).

б) *Геометрическая интерпретация решений однородной канонической системы.* Вместо того, чтобы обращаться, как в п. 3, к фазовому пространству A_{2n}, мы будем истолковывать переменные q и p (точнее, взаимные отношения этих последних) как координаты элемента F пространства конфигураций Γ_n. При таком истолковании, всякое задание переменных q и p в функции от t определяет в пространстве Γ_n движение элемента F, т. е. определяет в любой момент не только положение его центра P, но также и положение его гиперплоскости. Конечно, это справедливо для решения $q(t)$, $p(t)$ произвольной дифференциальной системы относительно переменных q, p; но если речь идет об однородной канонической системе, то результат упражнения 12 позволяет добавить, что в этом случае движение элемента F будет определено его начальным положением F^0. Действительно, когда задано F^0, т. е. положение центра P и положение гиперплоскости π элемента F в начале движения, то тем самым будут определены начальные значения направляющих косинусов нормали ν гиперплоскости π или, что то же, взаимные отношения начальных значений p^0 величин p; в силу результата упражнения 12 этого достаточно для того, чтобы были последовательно определены в любой момент координаты q и взаимные отношения величин p, т. е. положение центра элемента F и положение его гиперплоскости.

Можно сказать еще, что инвариантный характер, которым по отношению к однородной канонической системе согласно упражнению 11 обладает пфаффиан

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h,$$

обеспечивает нам то, что элементы, соединенные вначале, т. е. удовлетворяющие соотношению (9), остаются соединенными в течение всего времени движения.

Так, в частности, ∞^{n-1} элементов, принадлежащих в данный момент, от которого условимся отсчитывать время, к одной и той же связке с центром P_0, по истечении известного промежутка времени t (достаточно короткого для того, чтобы не возникли особые обстоятельства, которые мы, по крайней мере отчасти, будем иметь случай уточнить) будут образовывать многообразие ∞^{n-1} соединенных элементов; к этому можно добавить, что, вообще говоря, это многообразие будет иметь основание с наибольшим числом измерений, т. е. некоторую гиперповерхность. Легко видеть, что это обстоятельство обязательно будет иметь место, если предположить, что гессиан характери-

стической функции $H(p \mid q)$

$$\Delta_1 = \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p_k} \right\|,$$

который, как мы знаем, здесь тождественно равен нулю, имеет ранг $(n-1)$.

Предположим для определенности, что гессиан функции H относительно $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ не равен тождественно нулю. В силу n канонических уравнений

$$\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \quad (10)$$

разложения функций $q(t)$ в ряд Тэйлора, начиная от начального момента $t = 0$, имеют, по крайней мере с точностью до членов порядка выше первого, вид

$$q_h = q_h^0 + t\left(\frac{\partial H}{\partial p_h}\right)_0 + \ldots \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \quad (11)$$

где, конечно, производные от H подразумеваются вычисленными для $p_k = p_k^0$, $q_k = q_k^0$. Эти интегральные выражения для q, если в них q^0 рассматриваются постоянными, а отношения величин p^0 (от которых они только и зависят) — изменяющимися, дают параметрические уравнения основания нашего многообразия из ∞^{n-1} соединенных элементов в момент t. Размерность этого основания определяется рангом якобиевой матрицы от переменных q относительно отношений переменных $p_1^0, \ldots, p_n^0$, или, как еще можно сказать, относительно переменных $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_{n-1}^0$. На основании равенств (11) имеем

$$\frac{\partial q_h}{\partial p_k^0} = t\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p_k}\right)_0 + \ldots \qquad (h = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

а отсюда следует, что часть указанной якобиевой матрицы, содержащая t в наименьшей степени (мы можем ограничиться ею, если t предполагается достаточно малым), отличается только множителем t^{n-1} от матрицы

$$\left\| \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p_k}\right)_0 \right\| \qquad (h = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

которая при принятом предположении будет ранга $n-1$, так как она имеет отличный от нуля минор, образованный из первых $n-1$ строк. Таким образом, действительно, элементы связки с центром P^0 в конце промежутка времени t будут распределены по гиперповерхности.

Эта гиперповерхность, по соображениям, которые выяснятся из последующего, называется *гиперповерхностью* или *фронтом волны*, источником которой является центр P_0, а продолжительность распространения равна t; мы будем обозначать эту гиперповерхность $\sigma(P_0, t)$.

Рассмотрим, в частности, элементарное перемещение ∞^{n-1} элементов некоторой связки с центром P от момента t до ближайшего момента $t + dt$. Легко указать как точечное, так и тангенциальное уравнение *гиперповерхности элементарной волны* $\sigma(P, dt)$, которая является одновременно геометрическим местом центров и огибающей гиперплоскостей одних и тех же элементов к концу элементарного промежутка времени dt, отсчитываемого от момента t.

Вследствие того, что мы рассматриваем бесконечно малые перемещения, $\sigma(P, dt)$ будет близко к P, так что достаточно принять начало осей в точке P, чтобы координаты любой точки Q фронта волны $\sigma(P, dt)$ были равны приращениям dq, испытываемым координатами q в заданный элемент времени

Мы легко найдем искомые уравнения, если воспользуемся частным интегралом $H(p \mid q) = 1$ канонической системы. Действительно, вспомним прежде всего, что этот частный интеграл, если мы опять введем $\dot{q}$ вместо p (упражнение 10), вновь принимает лагранжеву форму

$$\mathfrak{L}(q \mid \dot{q}) = 1;$$

а так как $\mathfrak{L}$ есть однородная функция первой степени относительно $\dot{q}$, то ему можно придать вид

$$\mathfrak{L}(q \mid dq) = dt. \tag{12}$$

Это и есть точечное уравнение гиперповерхности элементарной волны, если мы будем рассматривать в нем координаты q центра P и dt, как постоянные, а dq — как текущие координаты.

С другой стороны, направляющие косинусы α_h нормали ν к $\sigma(P, dt)$ в любой точке dq пропорциональны значениям производных

$$\frac{\partial \mathfrak{L}(q \mid dq)}{\partial\, dq_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

в этой точке, которые в силу однородности $\mathfrak{L}$ можно написать в виде

$$\frac{\partial \mathfrak{L}(q \mid \dot{q})}{\partial \dot{q}_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

и поэтому они тождественны с обобщенными количествами движения p_h. Следовательно,

$$\alpha_h = \frac{p_h}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

а потому в силу последнего из равенств (8) расстояние w любой гиперплоскости, касательной к $\sigma(P, dt)$, от начала будет равно

$$w = \frac{\sum_{h=1}^{n} p_h\, dq_h}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}} = \frac{\sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}}\, dt.$$

Но в силу n канонических уравнений (10) и вследствие однородности H это последнее уравнение можно написать в виде

$$w = \frac{H(p \mid q)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}}\, dt = \frac{dt}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}}$$

или, вводя направляющие косинусы α_h, в виде

$$w = H(\alpha \mid q)\, dt. \tag{13}$$

Это есть тангенциальное уравнение фронта волны $\sigma(P, dt)$, если, конечно, мы будем рассматривать здесь q и dt как постоянные, а α_h и w — как текущие координаты.

Из точечного уравнения (12) следует в силу однородности $\mathfrak{L}$, что гиперповерхности элементарных волн $\sigma(P, d't), \sigma(P, d''t), \ldots$, относящихся к одному и тому же центру P, но отличающихся продолжительностями распространения $d't, d''t, \ldots$, будут между собой гомотетичны; их форма, вообще говоря, изменяется вместе с центром P, оставаясь неизменной только в том случае, когда $\mathfrak{L}$ не зависит от P, т. е. от q.

Переходя к тангенциальному уравнению (13), необходимо прежде всего отметить, что функцию $H(\alpha \mid q)$, так как она зависит исключительно от координат q и направляющих косинусов α, можно рассматривать как функцию $\mathcal{H}(F)$ произвольного элемента F, связанную с $H(p \mid q)$ соотношением

$$H(p \mid q) = \mathcal{H}(F)\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2}.$$

Если, в частности, эта функция $\mathcal{H}$, будучи зависимой от положения центра элемента P, не зависит от направления соответствующей нормали ν, т. е. если

$$H(p \mid q) = \mathcal{H}(P)\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2},$$

то гиперповерхности элементарных волн будут гиперсферами с центром в P.

Если, наоборот, $\mathcal{H}$ зависит от ориентации элемента, но не от положения центра, что равносильно предположению, что H зависит только от p, то в силу первой группы канонических уравнений, которая сведется к уравнениям $\dot{p}_h = 0$, все p будут постоянными, т. е. отдельные элементы движутся параллельно самим себе. Еще точнее, так как во второй группе канонических уравнений

$$\dot{q}_h = \frac{\partial H(p)}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

первые части вследствие неизменности p будут постоянными, то центры отдельных элементов будут двигаться прямолинейно и равномерно в направлении, вообще говоря, наклонном к элементу, а скорость центра будет зависеть от ориентации элемента, а не от положения, которое центр занимает в пространстве.

в) *Элементарный случай распространения сферических волн.* Рассмотрим несколько ближе случай, когда функция $\mathcal{H}$ прямо сводится к постоянной, для чего требуется, чтобы характеристическая функция, по крайней мере до постоянного множителя $\mathcal{H}$, была равна

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2}.$$

Скорость, с какой перемещаются отдельные элементы, которые, как мы знаем, остаются параллельными самим себе, имеет составляющие

$$\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} = \mathcal{H}\alpha_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда мы видим, что каждый элемент перемещается по направлению своей нормали и все имеют одну и ту же (постоянную) скорость $|\mathcal{H}|$; поверхность волны $\sigma(P, t)$ является сферой с центром в P и радиусом $|\mathcal{H}|t$. При одинаковой продолжительности распространения эти сферы будут между собой равны, каков бы ни был центр излучения.

Тем самым ход распространения за какой-нибудь промежуток времени становится непосредственно очевидным. Однако в качестве подготовки к более общим рассуждениям необходимо уточнить понятное само по себе выражение, которое мы поясним, обращаясь для простоты к обычному пространству ($n = 3$).

Элементы любой связки с центром P, начиная с момента $t=0$, распределятся в конце какого-нибудь промежутка времени t по поверхности сферы $\sigma(P, t)$ с центром P и радиусом $|\mathcal{H}|t$. Если в момент t каждая точка Q этой сферы рассматривается как новый центр излучения, то ∞^2 элементов с центром Q, начиная с момента t, к концу следующего промежутка времени t' $(<t)$ составят сферу $\sigma(Q, t')$ с центром Q и радиусом $|\mathcal{H}|t'$. Эти ∞^2 сфер $\sigma(Q, t')$, равных между собой и имеющих центрами различные точки $\sigma(P, t)$ (поверхность вторичной волны), имеют в качестве огибающей совокупность двух сфер с общим центром P и радиусами соответственно $|\mathcal{H}|(t-t')$ и $|\mathcal{H}|(t+t')$, вторая из этих сфер будет, очевидно, поверхностью волны, на которой будут распределяться элементы связки с центром в P к концу полного промежутка времени $t+t'$.

г) *Образование гиперповерхностей волн как огибающих вторичных волн.* Возвратимся к общему случаю. Имея в виду распространение только что рассмотренными сферическими волнами, ограничимся в наших рассуждениях теми случаями, когда функция

$$H(p \mid q) = \mathcal{H}(F)\sqrt{p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2}.$$

такова, что $\mathcal{H}(F)$, не будучи более постоянной, как выше, изменяется вместе с F так незначительно, что качественное поведение элемента с точки зрения свойств огибающей остается аналогичным поведению в элементарном случае „в". Выражаясь более точно, предположим, по крайней мере для некоторого промежутка времени, справедливыми следующие две гипотезы:

1) Если в любой момент t различные точки Q какой-нибудь гиперповерхности волны $\sigma(P, t)$ рассматриваются как новые центры, то ∞^{n-1} гиперповерхностей вторичных волн $\sigma(Q, t')$, которые из нее образуются к концу следующего промежутка времени t', имеют в качестве огибающей гиперповерхность σ' с одной или бо́льшим числом полостей.

2) Если обозначим через I совокупность ∞^{2n-2} элементов, которые в момент t имеют свои центры в различных точках Q фронта $\sigma(P, t)$, то совокупность I' стольких же элементов, происходящих от I в последующий промежуток времени t', будет такова, что, кроме указанной огибающей σ', не будет содержать никакого другого многообразия из ∞^{n-1} соединенных элементов с *основанием наибольшей размерности* $n-1$ [1]).

Приняв эти две гипотезы, заметим, что к совокупности I принадлежат, в частности, все элементы гиперповерхности волны $\sigma(P, t)$, которые к концу промежутка t', начиная с момента t, пойдут на образование гиперповерхности волны $\sigma(P, t+t')$. Поэтому элементы этой гиперповерхности будут принадлежать все к I'. Так как $\sigma(P, t+t')$, если рассматривать ее как совокупность элементов, определяет многообразие из ∞^{n-1} соединенных элементов с основанием ∞^{n-1}, а с другой стороны, по предположению, единственное многообразие, которое содержится в I', определяется огибающей σ', то мы заключаем, что гиперповерхность волны $\sigma(P, t+t')$ совпадает с огибающей σ' или, по крайней мере, с одной из ее полостей.

Таким образом, здесь, как и в элементарном случае, гиперповерхность волны $\sigma(P, t+t')$ будет образована как огибающая (полная или неполная) ∞^{n-1} вторичных волн $\sigma(Q, t')$, которые возникнут в момент времени t

---

[1]) Если обратимся к общей теории преобразований прикосновения, и именно к известной теореме С. Ли (см. Lie — Engel, Theorie der Transformationsgruppen, т. II, стр. 170), и, кроме того, примем во внимание, что однородная гамильтонова система определяет группу ∞^1 преобразований прикосновения, каноническим параметром которой является t, то легко увидим, что предположения „1", „2" будут непосредственно удовлетворены, если до момента $t+t'$ включительно гессиан функции H будет иметь ранг $n-1$ (ср. стр. 373).

в отдельных точках Q фронта $\sigma(P, t)$ и распространятся в течение промежутка времени t'.

Можно сказать, что в этой возможности образования любой волны как огибающей вторичных предшествующих волн (которая истолковывает, по существу, свойство группы простой бесконечности однородных преобразований прикосновения) заключается существенный характер распространения посредством волн.

Если мы обратим внимание на то, что дифференциальные уравнения, описывающие явление, вполне определяются функцией

$$H(p, q) = \mathcal{H}(F)\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2},$$

и вспомним, что функция $\mathcal{H}(F) = H(\alpha \mid q)$ в свою очередь зависит исключительно от формы гиперповерхностей элементарных волн, то увидим, что распространение посредством волн, в течение всего времени распространения, будет характеризоваться природой гиперповерхностей элементарных волн (что с точки зрения теории групп соответствует тому, что группа ∞^1 однородных преобразований прикосновения, указанная выше, может быть образована путем бесконечного повторения одного и того же бесконечно малого преобразования прикосновения).

д) *Лучевая скорость и скорость распространения.* Траектория центра P любого элемента называется *лучом* распространения волны, а скорость точки P, т. е. вектор с проекциями

$$\dot{q}_h = \frac{\partial H(p \mid q)}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

называется лучевой скоростью. Так как H не зависит от t и, с другой стороны, является однородной функцией первой степени относительно p, так что $\partial H/\partial p_h$ будут аналогично однородными функциями нулевой степени, то ясно, что лучевая скорость является функцией элемента (т. е. функцией положения и ориентации элемента), но не времени.

Составляющая лучевой скорости в направлении нормали ν к элементу определяемая соотношением

$$\sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \alpha_h = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}} \sum_{h=1}^{n} p_h \frac{\partial H}{\partial p_h} = \frac{H(p \mid q)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}},$$

будет не чем иным, как функцией $\mathcal{H}(F)$, и называется *скоростью распространения* системы волн.

Это название, данное функции $\mathcal{H}(F)$, можно оправдать следующими рассуждениями.

Рассмотрим для любого момента t какой-нибудь элемент F гиперповерхности волны σ. По истечении промежутка времени dt, т. е. в момент $t + dt$, элемент F принимает некоторое положение F', близкое к F, и весь фронт волны σ смещается в некоторую конфигурацию σ', близкую к σ, содержащую в силу основного свойства распространения элемент F'. При заданных положениях P и P' центров элементов F и F' расстояние по нормали от P до нового фронта волны, т. е. отрезок $d\nu$ нормали ν к F, заключенный между P и точкой пересечения ν с σ', будет равен

$$d\nu = PP' \cos(\widehat{PP', \nu}),$$

так как в непосредственной близости от точек P и P' гиперповерхности σ и σ' можно заменить гиперплоскостями (касательными) двух элементов;

$d\nu$ будет представлено в виде проекции элементарного перемещения центра P (с составляющими dq_h) на направление ν (с направляющими косинусами α_h). Поэтому имеем

$$\frac{d\nu}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \alpha_h = H(\alpha \mid q) = \mathcal{H}(F),$$

откуда видно, что $\mathcal{H}(F)$ действительно представляет собой скорость, с которой перемещается по направлению своей нормали фронт волны, содержащий элемент F.

Так как канонические уравнения вполне определяются функцией $H(p \mid q)$, или, что то же, функцией $\mathcal{H}(F)$, то мы приходим к заключению, весьма наглядному с физической точки зрения, что явление распространения волн может быть полностью описано, если известна скорость распространения, выраженная в функции места и ориентации фронта волны.

е) *Оптическое истолкование распространения посредством волн. Принцип Гюйгенса.* Понятие распространения посредством волн исторически ведет свое начало от Гюйгенса, согласно которому свет в любой среде распространяется посредством волн, в том смысле, что световое возмущение, испускаемое в данный момент $t = 0$ центром P, достигает по истечении некоторого промежутка времени некоторой вполне определенной поверхности (поверхность волны) $\sigma(P, t)$. К этому кинематическому представлению Гюйгенс (считавший среду однородной и изотропной, так что свет распространяется в ней по прямым линиям с постоянной скоростью, и потому поверхности волн будут равномерно расширяющимися сферами) присоединил следующий геометрический постулат, формулировка которого приводит к повторению рассуждений, уже вполне разъясненных в предыдущих пунктах. Рассматривая две последовательные поверхности световых волн $\sigma(P, t)$, $\sigma(P, t + t')$, испускаемых одним и тем же центром P, он допустил, что поверхность $\sigma(P, t + t')$ геометрически может быть образована в виде огибающей ∞^2 поверхностей вторичных волн $\sigma(Q, t')$, которые получились бы в момент $t + t'$, если бы они были порождены в момент t различными точками Q поверхности $\sigma(P, t)$, т. е. если бы каждая из этих точек стала в этот момент новым источником света.

Принимая во внимание предыдущие рассуждения, мы можем синтезировать здесь кинематические представление и геометрический постулат Гюйгенса следующим образом: *распространение света в какой угодно среде представляет собой процесс, определяемый однородной канонической системой с подходящей характеристической функцией* $H(p \mid q)$, конечно, однородной и первой степени относительно p.

Это и есть аналитическое выражение принципа Гюйгенса.

Для избежания недоразумений отметим, что здесь этот принцип рассматривается в его первоначальном исключительно геометрическом виде. В физической оптике, где распространение света связывают с колебательными явлениями, аналитическая формулировка принципа Гюйгенса в наиболее полной форме, приданной ему Френелем [1]), выражается, если рассматривать

---

[1]) Огюстен Жан Френель (Fresnel) родился в Нормандии в 1788 г., умер в Париже в 1827 г. Вместе с английским физиком Томасом Юнгом он дал экспериментальные основы волновой теории света. Выдающимися являются его опыты с явлением диффракции и интерференции поляризованного света. Согласно его теоретической концепции световые явления порождаются поперечными колебаниями некоторой среды (эфира), которую, для того чтобы иметь бесконечно малую плотность, наделяют свойством упругих твердых тел. При помощи волновой теории света ему удалось в удивительном согласии с опытом объяснить не только классические явления геометрической оптики

общий случай, дифференциальным уравнением с частными производными [1]).

Возвращаясь к геометрической оптике и обращаясь к характеристической функции

$$H(p \mid q) = \mathcal{K}(F)\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots p_n^2},$$

определяющей распространение посредством волн, заметим, что изотропные среды (в которых все направления должны быть физически эквивалентны) соответствуют предположению, что $\mathcal{K}$ не зависит от ориентировки элемента, т. е. является функцией только от q: однородные среды (в которых должны быть физически эквивалентны все точки) характеризуются предположением, что $\mathcal{K}$, а следовательно, также и H не зависит от q. В этом последнем случае, как мы это видели в пункте „б", свет распространяется по прямой линии со скоростью, зависящей в общем случае от направления (но не от места).

14. Доказать, что если закон распространения волны в декартовых координатах определяется функцией

$$f(x, y, z \mid t) = 0,$$

то скорость распространения будет равна

$$\frac{-\dfrac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

15. Рассмотреть распространение посредством волн, соответствующее характеристической функции

$$H(p \mid q) = \sqrt{\frac{p_1^2}{a_1^2} + \frac{p_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{p_n^2}{a_n^2}}$$

при постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (эллипсоидальные волны).

16. Геометрическую теорию распространения посредством волн можно обобщить на случай среды, оптические свойства которой изменяются с временем, рассматривая для этого характеристическую функцию $H(p \mid q \mid t)$, всегда однородную первой степени относительно p, но зависящую явно от t.

и аберрации (уже исследованные ранее различными путями), но также и явления диффракции и поляризации, что и обеспечило превосходство волновой теории над теорией испускания.

[1]) См. Kirchhoff, Vorlesungen über math. Physik, т. 2; Leipzig, 1891, лекция IV. Дальнейшие усовершенствования и обращения см: Maggi, *Ann. di Mat.* (2), т. 16, 1888, 21—48. Beltrami, Сочинения, т. IV, стр. 310—319, 525—529. Volterra, *Rend. Acc. Lincei* s. 5a, т. II. 1892_1, 1882, стр. 161—170, 255—277; *Nuovo Cimento*, s. 3a, т. XXXI, 1892, стр. 244—255; т. XXXIII, 1893, стр. 59—61. Levi-Civita, *Nuovo Cimento*, s. 4a, т. VI, 1897, стр. 204—209. Burgatti, *Nuovo Cimento*, s. 5a, т. XVI, 1907, стр. 183—198. Tedone, *Rend. Acc. Lincei*, s. 5a, т. XXVI, 1917_1, стр. 236—289, т. XXVII, 1918_1, стр. 351—360. Kottler, *Ann. der Physik*, т. 70, 1923, стр. 405—456. Hadamard, *Bull. de la Soc. math. de France*. т. LII, 1924, стр. 610—640, а также там же, стр. 241—278, и *Acta math.*, т. 49, 1926, стр. 203—244.

С этой целью см. Vessiot, Essai sur la propagation par ondes, *Ann. de l'Ec. Norm. Sup.*, 3 s, т. XXVI, 1909, стр. 405—448. Sur la propagation par ondes etc., *Journal de Math.*, сер. 6, т. IX, 1913, стр. 39—76.

17. Эллиптические координаты. Рассмотреть в евклидовом пространстве n ($\geqslant 2$) измерений, в котором $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются ортогональными декартовыми координатами, уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} - 1 = 0, \tag{14}$$

где λ есть действительный параметр, изменяющийся от $-\infty$ до $+\infty$, и a_i обозначают n действительных и различных постоянных, причем

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n.$$

Если положим

$$f(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\ldots(\lambda - a_n), \tag{15}$$

то функцию

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} - 1 \tag{16}$$

в левой части (14) можно написать в виде

$$\varphi(\lambda) = -\frac{F(\lambda)}{f(\lambda)}, \tag{17}$$

где $F(\lambda)$ есть полином степени n относительно λ (и, конечно, зависящий от x и от a), для которого здесь нет необходимости давать явную форму. Достаточно отметить, что коэффициент при λ^n в $F(\lambda)$ предполагается равным положительной единице. Функция $\varphi(\lambda)$, в которой x приписываются любые значения, обращается в бесконечность (первого порядка), как это следует из равенства (16), при $\lambda = a_1, a_2, \ldots, a_n$ и только при этих значениях λ; легко также видеть, что она исчезает при некоторых n действительных значениях

$$q_1 > q_2 > \ldots > q_n,$$

являющихся внутренними для интервалов

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, -\infty). \tag{18}$$

Действительно, если обратимся к интервалу (a_j, a_{j+1}) при $j < n$, то очевидно, что функция $\varphi(\lambda)$ будет оставаться в нем, за исключением концов конечной и непрерывной; если напишем

$$\varphi(\lambda) = \frac{x_j^2}{a_j - \lambda} + \frac{x_{j+1}^2}{a_{j+1} - \lambda} + \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{x_j^2}{a_i - \lambda} - 1,$$

где в сумме Σ' должны быть пропущены члены с индексами j и $j+1$, то обнаружим, что функция $\varphi(\lambda)$ стремится к $+\infty$, когда λ стремится, возрастая, к a_j, и к $-\infty$, когда λ стремится, убывая, к a_{j+1}. Поэтому $\varphi(\lambda)$ исчезает согласно утверждению при некотором значении q_j, *внутреннем* для интервала (a_j, a_{j+1}); аналогично, записав эту функцию в виде

$$\varphi(\lambda) = \frac{x_n^2}{a_n - \lambda} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} - 1$$

найдем, что она обратится в нуль при некотором значении $q_n < a_n$. Очевидно, что эти n значений q_n, для которых имеем

$$\varphi(q_h) = 0, \quad f(q_h) \neq 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

суть не что иное, как корни полинома $F(\lambda)$, который, если иметь в виду, что коэффициент при λ^n равен 1, можно написать в виде

$$F(\lambda) = (\lambda - q_1)(\lambda - q_2) \ldots (\lambda - q_n). \tag{19}$$

Значения q_h, которые при заданных значениях постоянных a_i будут однозначно соответствовать произвольной совокупности n декартовых координат x_i, т. е. произвольной точке P пространства, называются эллиптическими координатами точки P.

Но для оправдания названия координат необходимо, обратно, показать, что всякой совокупности n чисел q_h, выбранных соответственно в интервалах (18) с исключенными концами, однозначно соответствует точка, по крайней мере в надлежащим образом ограниченной области пространства. В действительности легко показать, что соответственно выбранным q_h будут определены не самые значения декартовых координат x_i, а только значения их квадратов.

Для этой цели приравняем два выражения (16), (17) функции $\varphi(\lambda)$ и, по умножении их на некоторую определенную разность $a_i - \lambda$, заставим стремиться параметр λ к a_i. Первое в пределе даст непосредственно x_i^2; что касается второго, то достаточно применить к отношению $(a_i - \lambda)/f(\lambda)$ правило Лопиталя (имея при этом в виду, что в силу равенств (19), (15), $F(a_i) \neq 0$ и $f'(a_i) \neq 0$), чтобы заключить, что

$$x_i^2 = \frac{F(a_i)}{f'(a_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{20}$$

Это и будут искомые выражения для координат x в функциях от q, если в них под $F(\lambda)$ подразумевается выражение (19). Мы имеем, таким образом, одно-однозначное соответствие между n эллиптическими координатами и точками пространства со всеми положительными декартовыми координатами (т. е. из первого квадранта при $n = 2$, из первого октанта при $n = 3$ и т. д.).

Остается оправдать название этих координат эллиптическими. Оно объясняется природой координатных гиперповерхностей $q_h = \text{const}$, т. е. геометрических мест точек, в которых одна из координат q, например q_h, сохраняет одно и то же значение.

В силу самого определения координат q декартово уравнение соответствующей координатной гиперповерхности имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i - q_h} - 1 = 0.$$

Отсюда видно, что при $h = n$, если все знаменатели положительны, мы имеем эллипсоид, при $h = 1, 2, \ldots, n-1$ — центральную поверхность второго порядка иного вида; все эти поверхности второго порядка будут софокусными, так как соответствующие фокальные многообразия зависят исключительно от разностей знаменателей, которые при изменении q не изменяются.

Если будем рассматривать две различные эллиптические координаты q_h и q_k одной и той же точки x_i, то будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i - q_h} - 1 = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i - q_k} - 1 = 0;$$

вычитая почленно и деля обе части на разность $q_h - q_k$ (наверное, не равную нулю в различных интервалах (18), мы получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{(a_i - q_h)(a_i - q_k)} = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n;\ h \neq k) \quad (21)$$

Предоставим читателю выполняемую элементарными средствами поверку, что эти тождества выражают тот геометрический факт, что поверхности второго порядка $q_h = \text{const}$, $q_k = \text{const}$ (для всякой пары неравных индексов h, k) будут взаимно ортогональны. Немного позже мы их получим, найдя, что в выражении *линейного элемента*

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} dx_j^2$$

пространства (которое здесь является необходимым в силу упражнения 19) отсутствуют члены с произведениями дифференциалов dq, если выразить ds^2 в функции от q и dq.

Именно, для вычисления такого выражения ds^2 необходимо предварительно выразить в функции от q количество

$$G_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{(a_i - q_h)^2} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \quad (22)$$

к которому приводятся левые части равенств (21) при $h = k$. Для этой цели приравняем еще раз два выражения (16), (17) функции $\varphi(\lambda)$ и, взяв производную по λ, положим $\lambda = q_h$. Таким способом, принимая во внимание, что на основании выражений (15), (19) имеем

$$F(q_h) = 0, \quad f(q_h) \neq 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

мы получим

$$G_h = -\frac{F'(q_h)}{f(q_h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

или в явной форме

$$G_h = \frac{(q_1 - q_h) \ldots (q_{h-1} - q_h)(q_{h+1} - q_h) \ldots (q_n - q_h)}{(a_1 - q_h)(a_2 - q_h) \ldots (a_n - q_h)}. \qquad (22')$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n).$$

Возьмем теперь логарифмическую производную от обеих частей равенства (20), рассматривая в нем x и q как декартовы и эллиптические координаты одной и той же текущей точки, и примем во внимание выражение (19) для F. Таким образом получим

$$2\frac{dx_i}{x_i} = \sum_{h=1}^{n} \frac{dq_h}{q_h - a_i};$$

умножая обе части на $x_i/2$ и возводя в квадрат, получим равенства

$$dx_i^2 = \frac{1}{4} \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}}^{n} \frac{x_i^2}{(q_h - a_i)(q_k - a_i)} dq_h dq_k. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Теперь достаточно просуммировать это равенство по индексу i и, изменив порядок суммирований по i и по h, k, принять во внимание уравнения (21), (22), чтобы прийти к искомому выражению

$$ds^2 = \frac{1}{4} \sum_{h=1}^{n} G_h \, dq_h^2 \tag{23}$$

линейного элемента, очевидно, ортогональному.

18. Эллиптические координаты Эйлера. В случае плоскости параметрические выражения (20) декартовых координат x, y, если положим $a_1 = c^2$, $a_2 = 0$, принимают вид

$$x^2 = \frac{(c^2 - q_1)(c^2 - q_2)}{c^2}, \quad y^2 = -\frac{q_1 q_2}{c^2}, \tag{24}$$

где, конечно, координата q_1 должна рассматриваться положительной и меньшей c^2, а координата q_2 — отрицательной.

Поэтому, обозначая, как обычно, через sh и ch гиперболические синус и косинус, можно положить

$$q_1 = c^2 \sin^2 \xi, \quad -q_2 = c^2 \operatorname{sh}^2 \eta,$$

где ξ и η обозначают два действительных параметра. Отсюда следует

$$c^2 - q_1 = c^2 \cos^2 \xi, \quad c^2 - q_2 = c^2 \operatorname{ch}^2 \eta.$$

и, далее, подставляя в равенства (24) и извлекая квадратные корни (не принимая во внимание двойного знака),

$$x = c \cos \xi \operatorname{ch} \eta, \quad y = c \sin \xi \operatorname{sh} \eta.$$

Проверить прямо, отправляясь от этих формул преобразования координат x, y и ξ, η, что:

1) линии $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ (которые не отличаются от $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$) представляют соответственно софокусные гиперболы и эллипсы с фокусами в точках $x = \pm c$, $y = 0$, причем для главных полуосей при очевидных обозначениях имеют место выражения

$$a_1 = c\,|\cos \xi|, \quad b_1 = c\,|\sin \xi|$$

в случае гиперболы и

$$a_2 = c \operatorname{ch} \eta, \qquad b_2 = c \operatorname{sh} \eta$$

в случае эллипса;

2) для координаты ξ, по крайней мере до кратных 2π, имеет место однооднозначное соответствие между парами значений ξ, η и точками всей плоскости, вместо одного только квадранта, как это имело место для первоначальных q_1, q_2;

3) линейный элемент плоскости в координатах ξ, η определяется равенством

$$ds^2 = c^2 (\operatorname{ch}^2 \eta - \cos^2 \xi)(d\xi^2 + d\eta^2).$$

Заметим, что посредством координат ξ, η произвольной точки P можно выразить в рациональной форме расстояния r_1, r_2 этой точки от фокусов. Действительно, в силу фокальных свойств соответственно гиперболы и эллипса имеем

$$|r_1 - r_2| = a_1 = c\,|\cos \xi|, \quad r_1 + r_2 = c \operatorname{ch} \eta$$

и для заданного значения ξ всегда можно выбрать фокусы таким образом, чтобы имело место равенство

$$r_1 - r_2 = c \cos \xi,$$

после чего на основании однозначности и непрерывности соответствия между точками и парами координат ξ, η можно быть уверенным, что равенство продолжает существовать при каком угодно положении точки P. Из предыдущих равенств следует

$$r_1 = \frac{c}{2}(\operatorname{ch}\eta + \cos\xi), \quad r_2 = \frac{c}{2}(\operatorname{ch}\eta - \cos\xi).$$

19. Геодезические линии эллипсоида. В п. 44 гл. II мы рассматривали геодезические линии какой угодно поверхности σ как траектории движения по инерции (спонтанное движение) материальной точки, удерживаемой без трения на поверхности σ. В случае поверхности общего типа мы ограничились указанием на основании интеграла живых сил, что движение происходит с постоянной по величине скоростью, не занимаясь задачей интегрирования, которое к тому же, если не вводить частных предположений, мы не сможем выполнить элементарными средствами. В специальном случае поверхности вращения мы видели (пп. 45, 46 гл. II), что имеет место также интеграл площадей в плоскостях, нормальных к оси вращения, и что это обстоятельство позволяет привести определение движения по инерции, а следовательно, и геодезических линий к квадратурам. Здесь читатель может убедиться в этом без вычислений, обращаясь к теореме Лиувилля из п. 44.

Далее, другой известный тип поверхностей, для которых оказывается возможным определить геодезические линии при помощи квадратур, составляют поверхности второго порядка. Это определение впервые было выполнено Якоби при помощи эллиптических координат, которые он определил изящным способом, указанным в упражнении 17.

Останавливаясь на эллипсоиде с каноническим уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} - 1 = 0$$

при $a_1 > a_2 > a_3 > 0$, рассмотрим его октант, содержащийся в области точек со всеми положительными декартовыми координатами, и введем для этих точек согласно сказанному в упражнении 17 эллиптические координаты q_1, q_2, q_3 (в одно-однозначном соответствии с декартовыми координатами), которые определяются для всякой точки x_i уравнением третьей степени относительно λ

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} - 1 = 0.$$

Точки эллипсоида σ определяются значением $\lambda = 0$, и это значение λ, как меньшее a_3, есть не что иное, как третья эллиптическая координата q_3, так что в эллиптических координатах уравнение эллипсоида сводится к особенно простому виду: $q_3 = 0$.

Далее, для того чтобы иметь в эллиптических координатах выражение для живой силы

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

материальной точки (с массой, равной 1), удерживаемой на поверхности σ, нам остается только применить формулу (23) из упражнения 17, полагая в нем $n = 3$, $q_3 = \dot{q}_3 = 0$. Таким образом получим

$$T = \frac{1}{8}(G_1\dot{q}_1^2 + G_2\dot{q}_2^2),$$

где на основании формулы (22′) величины G_1, G_2 определяются равенствами

$$G_1 = (q_1 - q_2)B_1(q_1), \quad G_2 = (q_1 - q_2)B_2(q_2),$$

в которых B_1, B_2 представляют собой соответственно функции только от q_1, q_2 и в явной форме, если принять меры к тому, чтобы входили только положительные разности, имеют вид

$$B_1 = \frac{q_1}{(a_1 - q_1)(q_1 - a_2)(q_1 - a_3)}, \quad B_2 = \frac{q_2}{(a_1 - q_2)(a_2 - q_2)(q_2 - a_3)}.$$

Форма полученного таким образом выражения для живой силы и предположение отсутствия активных сил позволяют непосредственно видеть, что определение геодезических линий эллипсоида приводит, как к частному случаю ($n = 2$, $U = 0$, $A_1 = q_1$, $A_2 = -q_2$), к тому типу задач, интегрируемых посредством разделения переменных, который мы изучили в п. 62 (случай интегрируемости Лиувилля).

20. Движение точки, притягиваемой двумя неподвижными центрами в отношении, обратно пропорциональном квадрату расстояния. Эта знаменитая задача рассматривалась впервые Эйлером, который показал, что в случае плоского движения она приводится к квадратурам. Рассмотренная снова Лагранжем, она была затем решена Якоби в эллиптических координатах при помощи метода разделения переменных способом, который мы кратко здесь изложим.

Эта задача не имеет прямого астрономического интереса, так как неподвижность двух центров притяжения несовместима с законом Ньютона, однако она имела и продолжает сохранять довольно большое значение с аналитической точки зрения потому, что дает поучительный пример применения плодотворных математических теорий (криволинейные координаты, эллиптические интегралы, периодические решения). Исчерпывающий разбор ее находится в уже цитированном сочинении Charlier, Die Mechanik des Himmels, Leipzig, т. I, 1902, стр. 117—163[1]).

Пусть O_1, O_2 будут два неподвижных центра с массами соответственно m_1, m_2 и расстоянием между ними $O_1O_2 = 2c$; обозначим, как обычно, через f постоянную ньютонианского притяжения. Положение притягиваемой точки P, массу которой будем предполагать равной 1, для любого момента можно определить, рассматривая прежде всего угол φ, который движущаяся полуплоскость O_1O_2P образует с произвольной стороной неподвижной полуплоскости, выходящей из O_1O_2, и затем координаты x, y точки P в движущейся плоскости O_1O_2P по отношению к декартовым осям, имеющим начало в средней точке O отрезка O_1O_2, и ось x, совпадающую с прямой центров (ориентированной таким образом, чтобы относительно нее казалось правым направление, в котором условились отсчитывать φ).

При изменении φ плоскость O_1O_2P вращается вокруг оси Ox с угловой скоростью $\dot{\varphi}$, вообще говоря, переменной; а так как абсолютную скорость точки P можно рассматривать как сумму ее относительной скорости по отношению к осям xy и переносной скорости, происходящей от вращения плоскости, то для живой силы найдем выражение

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + y^2\dot{\varphi}^2).$$

С другой стороны, для потенциала, обозначая через r_1, r_2 расстояния O_1P, O_2P, очевидно, имеем

$$U = f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right).$$

[1]) См. также большую библиографию у A. M. Hiltebeitel, The problem of two fixed centres and certain of its generalisations, *Journal of Mathematics*, т. XXXIII, 1911, стр. 337—362.

Мы видим, таким образом, что φ есть игнорируемая координата, так что имеется соответствующий интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = y^2\dot{\varphi} = k,$$

выражающий постоянство момента количества движения относительно оси Ox, проходящей через центры O_1 и O_2. Существование этого интеграла можно было предвидеть apriori, так как линии действия обеих сил пересекают ось Ox.

Далее, наличие такого интеграла позволяет свести задачу только к двум степеням свободы (гл. V, п. 45). Соответствующую приведенную функцию Лагранжа

$$\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L} - k\dot{\varphi} = T + U - k\dot{\varphi}$$

можно написать, принимая во внимание ранее полученное выражение для T и выражение самого интеграла, в виде

$$\mathfrak{L}^* = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U - \frac{1}{2}\frac{k^2}{y^2}.$$

Поэтому все будет происходить так, как если бы мы имели плоское движение точки, отнесенной к неподвижным осям Oxy и находящейся под действием сил, имеющих потенциал

$$U^* = U - \frac{1}{2}\frac{k^2}{y^2} = f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - \frac{1}{2}\frac{k^2}{y^2};$$

достаточно перейти, посредством преобразования из упражнения 18, от x, y к эллиптическим координатам q_1, q_2 или ξ, η, имеющим фокусы в центрах сил O_1, O_2, чтобы видеть, что и эта задача приводится к типу задач Лиувилля, интегрируемых посредством разделения переменных (п. 62).

Действительно, если мы будем пользоваться координатами ξ, η, то прежде всего будем иметь

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{c^2}{2}(\operatorname{ch}^2\eta - \cos^2\xi)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2);$$

далее, вспоминая тождество

$$\operatorname{ch}^2\eta - \cos^2\xi = \operatorname{sh}^2\eta + \sin^2\xi,$$

найдем:

$$U^* = \frac{U_1(\xi) + U_2(\eta)}{\operatorname{ch}^2\eta - \cos^2\xi},$$

где

$$U_1(\xi) = \frac{2}{c}f(m_2 - m_1)\cos\xi - \frac{k^2}{2c^2}\frac{1}{\sin^2\xi},$$

$$U_2(\eta) = \frac{2}{c}f(m_1 + m_2)\operatorname{ch}\eta - \frac{k^2}{2c^2}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\eta}.$$

21. Несколько более общий случай, когда задача интегрируется в эллиптических координатах путем разделения переменных, мы будем иметь, если речь будет идти о материальной точке, которая находится под действием ньютонианского притяжения двумя неподвижными центрами O_1, O_2 и испытывает, кроме того, притяжение, исходящее из центра тяжести точек O_1, O_2 и пропорциональное расстоянию, каков бы ни был при этом множитель пропорциональности.