

## *Г л а в а XI*

### **ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ**

1. В гл. V мы видели, что все законы механики материальных систем со связями без трения, по существу, синтезируются в *принципе виртуальной работы* или, еще лучше, в вытекающем из него общем соотношении динамики, так что, пользуясь этим единственным соотношением, мы в состоянии для какой угодно задачи составить дифференциальные уравнения движения. Тем не менее представляют интерес и оказывается удобным преобразовать общее соотношение динамики таким образом, чтобы прийти к формулам, в основном эквивалентным этому соотношению, но имеющим отличную от него структуру; эти формулы с прикладной и эвристической точек зрения допускают или возможные обобщения, выходящие за рамки узко механических задач, или, в некоторых случаях, более быстрый вывод дифференциальных уравнений движения, а с теоретической точки зрения они представляют собой интерпретации, обнаруживающие некоторые общие свойства движения систем, которые, конечно, логически содержатся в принципе виртуальной работы, однако не могут быть непосредственно получены из его первоначальной формулировки.

Предложения, к которым мы таким образом приходим, обычно называют *принципами*. В этой главе мы предполагаем установить некоторые из этих принципов; одни из них справедливы в общем случае, а другие — только для некоторых специальных классов надлежащим образом определенных систем.

Мы будем предполагать во всех случаях, что речь идет о материальных системах исключительно с двусторонними связями, так что для этих систем будет справедливо *общее уравнение динамики*. Мы начнем с изложения принципа наименьшего принуждения или наименьшего усилия Гаусса и принципа прямейшего пути Герца; эти принципы не только равносильны принципу виртуальной работы, но и прямо могут быть сведены к тому общему уравнению динамики, для которого они составляют только две новые интерпретации.

#### **§ 1. Принцип наименьшего принуждения или наименьшего усилия Гаусса**

**2. Принуждение и усилие.** Пусть дана какая-нибудь материальная система из  $N$  точек  $P_i (i = 1, 2, \dots, N)$  с какими угодно связями;

будем рассматривать состояние движения (конфигурацию  $C_0$  и распределение скоростей  $v^0$ ), которое она имеет в любой определенный момент  $t$ , находясь под действием заданных сил  $F_i$ . К концу следующего промежутка времени  $\tau$ , т. е. в момент  $t + \tau$ , система при совместном действии активных сил и реакций связей приходит в некоторую новую конфигурацию  $C$ ; если бы в момент  $t$  связи отсутствовали и точки системы в течение того же промежутка времени  $\tau$  двигались свободно под действием заданных сил  $F_i$ , то их конфигурация  $C^*$  к моменту  $t + \tau$  была бы, вообще говоря, отлична от  $C$ .

Различие между конфигурациями  $C^*$  и  $C$  мы можем приписать *принуждению*, которое оказывают связи на материальную систему и которому, в силу принципа равенства действия и противодействия, должна соответствовать совокупность *усилий* или *давлений*, испытываемых связями или, лучше сказать, реализующими связи материальными телами (шарниры, направляющие, опоры, подвесы и т. д.). Здесь необходимо дать физически обоснованное математическое определение такого принуждения, а следовательно, и совокупности противоположных усилий или давлений на связи, ограничиваясь хотя бы выражением их суммарного эффекта.

Заметим прежде всего, что эмпирическое понятие принуждения от связей или соответствующего давления на связи заключает в себе распределительное свойство в том смысле, что принуждение в целом, необходимое для изменения движения нескольких материальных точек, можно рассматривать как сумму принуждений, которые требуются для каждой точки в отдельности. Уточним прежде всего это понятие для случая только одной материальной точки  $P$ .

Итак, пусть  $Q$ ,  $Q^*$  будут два различных положения, которых достигает одна и та же точка  $P$  за один и тот же промежуток времени от  $t$  до  $t + \tau$ , исходя из одного и того же состояния движения, в действительном движении со связями, или, как будем также говорить, в *естественному* движении и в воображаемом свободном движении. Тогда принуждение, вызываемое связями, обнаруживается в том, что положение  $Q$  не совпадает с положением  $Q^*$ , т. е. принуждение зависит от отрезка  $QQ^*$  и должно быть принято равным нулю, если  $Q$  будет совпадать с  $Q^*$ , так как в этом случае все будет происходить так, как если бы связей не было.

С другой стороны, целесообразно принять это принуждение пропорциональным массе точки, так как для того, чтобы изменить движение точки, т. е. для того чтобы сообщить точке ускорение, необходимо при прочих равных условиях некоторое усилие, тем большее, чем больше соответствующая масса. В силу этих соображений оказывается приемлемым соглашение оценивать в этом случае принуждение в виде произведения  $mQQ^{*2}$  массы  $m$  точки на квадрат расстояния от  $Q$  до  $Q^*$ .

В более общем случае, для системы из  $N$  материальных точек, мы назовем принуждением (не отрицательную) скалярную величину,

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N m_i Q_i Q_i^*, \quad (1)$$

где  $m_i$  есть масса произвольной точки  $P_i$ , а  $Q_i, Q_i^*$  обозначают положения, достигаемые ею к концу заданного промежутка времени, начиная от одного и того же состояния движения, первое — в естественном движении, а второе — в воображаемом свободном движении.

Важно отметить, что такое принуждение зависит, помимо связей и действующих на систему сил, от промежутка времени, к которому оно относится, и от начального состояния движения.

**3. Принцип Гаусса.** Для последующего необходимо выражению принуждения (1) придать явный вид, в предположении, что связи, наложенные на систему, являются идеальными и двусторонними. Если в качестве лагранжевых (избыточных) координат  $N$  точек  $P_i$  системы примем соответствующие декартовы координаты  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  относительно некоторой галилеевой системы отсчета, то связи, будут ли они голономными или неголономными, могут быть выражены (т. I, гл. XV, § 7) уравнениями вида

$$B_k - b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad (2)$$

где каждое  $B_k$  обозначает линейную форму относительно проекций  $\dot{\xi}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\zeta}_i$  скоростей  $v_i$  отдельных точек  $P_i$ , а величины  $b_k$  вместе с коэффициентами только что указанных линейных форм зависят от конфигурации точек  $P_i$ , т. е. от координат  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  и, возможно, от времени.

Для того чтобы выразить зависимость уравнений (2) от скоростей, напишем эти уравнения в виде

$$B_k(v) - b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r). \quad (2')$$

С другой стороны, вспомним, что для всякой связи, не зависящей от времени, соответствующее  $b_k$  будет тождественно равно нулю, и, независимо от того, будут или не будут  $b_k$  равными нулю, виртуальные перемещения системы для любой конфигурации определяются уравнениями

$$B_k(\delta P) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad (3)$$

где  $B_k(\delta P)$  представляет линейную форму, которая получается из  $B_k(v)$  путем подстановки вместо проекций  $\dot{\xi}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\zeta}_i$  каждой из скоростей  $v_i$  соответствующих проекций  $\delta\xi_i, \delta\eta_i, \delta\zeta_i$  рассматриваемого виртуального перемещения  $\delta P_i$ .

Установив это, заметим, что так как скорости  $v$ , допускаемые связями для отдельных точек системы, связаны соотношениями (2'),

то соответствующие ускорения будут связаны уравнениями, которые получатся из уравнений (2') дифференцированием по времени, т. е. уравнениями

$$B_k(\alpha) - c_k(v | P | t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r). \quad (4)$$

В этих уравнениях  $B_k$  обозначают все еще те же линейные формы, которые входят в равенства (2'), но выражены через  $\xi_i, \dot{\xi}_i, \ddot{\xi}_i$  вместо  $\xi_i, \dot{\eta}_i, \ddot{\zeta}_i$ ; функции  $c_k$  в отличие от  $b_k$  зависят от конфигурации системы и от времени, а также и от скоростей (но не от ускорений).

Представим себе теперь, как и в предыдущем пункте, что система в момент  $t_0$  выходит из заданной конфигурации  $C_0$  (в которой  $Q_i^0$  есть положение любой точки  $P_i$ ) и с заданными скоростями  $v_i^0$ , конечно, совместными со связями. Ускорения  $a_i$  отдельных точек  $P_i$  в естественном движении должны удовлетворять уравнениям (4), в которые вместо  $v, P, t$  подставлены  $v^0, Q^0, t^0$ , т. е. уравнениям

$$B_k(\alpha) - c_k(v^0 | Q^0 | t^0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r). \quad (4')$$

Но эти уравнения недостаточны для однозначного определения  $a_i$ , так как можно указать бесконечное множество систем ускорений, которые им удовлетворяют; среди этих различных систем ускорений ускорения  $a_i$ , соответствующие естественному движению, выделяются тем, что они должны удовлетворять, кроме того, общему уравнению динамики

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i = 0$$

для всех виртуальных перемещений системы, т. е. для всех  $\delta P_i$ , определяемых из уравнений (3).

Распределение ускорений, которое для рассмотренного выше состояния движения  $C_0$ ,  $v^0$  будет также совместно со связями, но не будет совпадать с только что определенным естественным распределением  $a_i$ , можно выразить через  $a_i + \delta a_i$ ; эти ускорения должны удовлетворять уравнениям

$$B_k(\alpha + \delta \alpha) - c_k(v^0 | Q^0 | t^0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

которые, если принять во внимание линейность  $B_k$  и (4'), приводятся к виду

$$B_k(\delta \alpha) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r). \quad (5)$$

Сопоставляя эти уравнения с уравнениями (3), мы видим, что вариации  $\delta a_i$  системы ускорений для значений  $a_i$ , совместных со связями, векторно тождественны с виртуальными перемещениями, благодаря чему мы можем сказать, что естественное движение опре-

деляется, вместо общего уравнения динамики, аналогичным уравнением

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i \dot{a}_i) \cdot \delta a_i = 0, \quad (6)$$

так как это уравнение справедливо для всех вариаций ускорений, удовлетворяющих уравнениям (5).

Из интерпретации этого уравнения (6) вытекает принцип Гаусса.

Чтобы показать это, сравним две конфигурации  $Q_i^*$  и  $Q_i$ , соответствующие одному и тому же начальному состоянию движения  $c_0$  и  $v^0$ . Первая из конфигураций  $Q_i^*$  достигается в *свободном* движении, а вторая  $Q_i$  достигается за тот же промежуток времени  $\tau$  при ускорениях  $a_i$ , совместных со связями. К концу этого промежутка времени  $\tau$ , который потом мы будем рассматривать достаточно малым, имеем

$$Q_i^* = Q_i^0 + \tau v_i^0 + \frac{\tau^2}{2m_i} F_i + (3), \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$Q_i = Q_i^0 + \tau v_i^0 + \frac{\tau^2}{2m_i} a_i + (3)$$

где символ (3) означает некоторое количество третьего порядка относительно  $\tau$ ; отсюда, обозначая аналогично через (1) количество первого порядка, получим

$$Q_i^* - Q_i = \frac{\tau^2}{2} \left\{ \frac{1}{m_i} (F_i - m_i a_i) + (1) \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N);$$

поэтому для принуждения, соответствующего переходу от свободного движения к любому движению, совместному со связями, на основании равенства (1) получим выражение

$$\Gamma = \frac{\tau^4}{4} (\gamma + (1)), \quad (7)$$

где

$$\gamma = \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} (F_i - m_i a_i)^2. \quad (8)$$

После этого возьмем снова общее уравнение динамики (6), которое определяет среди возможных движений естественное, и покажем прежде всего, что оно выражает условие минимума количества  $\gamma$  для естественного движения по сравнению со всяkim другим движением, для которого начальное состояние одно и то же, а система ускорений кинематически возможна.

Действительно, уравнение (6), так как  $F$  не зависит от  $a$ , является не чем иным, как условием  $\delta \gamma = 0$  стационарности  $\gamma$ , и мы

имеем здесь именно минимум функции  $\gamma$ , так как вторая вариация

$$\delta^2\gamma = 2 \sum_{i=1}^N m_i \delta a_i \cdot \delta a_i$$

существенно положительна.

Наконец, можно прямо проверить, что для естественного движения  $\gamma$  принимает значение  $\gamma_n$ , меньшее (и неравное) значения, соответствующего какой-нибудь другой системе ускорений  $a_i$ , совместных со связями. Для этой цели заметим сначала, что ускорения  $a_i^{(n)}$  естественного движения в любой момент  $t_0$  удовлетворяют соотношениям (4'), которые (в тот же момент и для того же состояния движения  $Q^0, v^0$ ) будут также удовлетворяться любой системой ускорений, совместных со связями. Поэтому вариации  $\Delta a_i = a_i - a_i^{(n)}$  удовлетворяют уравнениям (5), а уравнение (6), в частности, дает

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i a_i^{(n)}) \cdot \Delta a_i = 0. \quad (6')$$

Если теперь примем во внимание тождество

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m_i} (F_i - m_i a_i)^2 - \frac{1}{2m_i} (F_i - m_i a_i^{(n)})^2 = \\ = - (F_i - m_i a_i^{(n)}) \cdot \Delta a_i + \frac{1}{2} m_i (\Delta a_i)^2 \end{aligned}$$

и уравнение (6'), то придем к равенству

$$\gamma - \gamma_n = \sum_{i=1}^n m_i (\Delta a_i)^2,$$

из которого как раз и следует, что  $\gamma$  больше  $\gamma_n$  во всех тех случаях, когда не исчезают все  $\Delta a_i$ , т. е. когда  $\gamma$  не соответствует естественному движению.

Заметив это, мы придем к искомому истолкованию уравнения (6), если докажем, что при достаточно малом  $\tau$  вместе с  $\gamma$  будет иметь наименьшее значение и принуждение  $\Gamma$ . Прежде всего, если наименьшее значение  $\gamma$  равно нулю, то имеем соответственно  $m_i a_i = F_i$ , т. е. естественное движение, соответствующее наименьшему значению  $\gamma$ , совпадает со свободным движением; но тогда и принуждение  $\Gamma$  обращается в нуль, и так как принуждение, по определению, не может быть отрицательным, то оно действительно имеет в этом случае наименьшее значение.

Исключив этот случай и обозначив через  $\gamma_n, \Gamma_n$  значения, которые имеют  $\gamma$  и  $\Gamma$  в естественном движении, мы увидим, что минимум  $\gamma_n$  величины  $\gamma$  непременно будет положительным. Если бы минимум  $\Gamma$  не был равен  $\Gamma_n$ , то он был бы равен некоторому значению

$\Gamma_1 < \Gamma_n$  и это последнее значение принуждения  $\Gamma_1$  соответствовало бы некоторому движению, совместному со связями, но отличному от естественного; в этом движении величина  $\gamma$  имела бы значение  $\gamma_1 > \gamma_n$ . Это приводит, однако, к противоречию, так как, вычитая по членно два уравнения

$$\Gamma_n = \frac{\tau^4}{4} (\gamma_n + 1), \quad \Gamma_1 = \frac{\tau^4}{4} (\gamma_1 + 1),$$

мы приедем к соотношению

$$\Gamma_n - \Gamma_1 = \frac{\tau^4}{4} (\gamma_n - \gamma_1 + 1),$$

в котором при допущенных выше условиях левая часть должна была бы быть положительной, а правая, по крайней мере для  $\tau$  достаточно малого, имела бы знак разности  $\gamma_n - \gamma_1$ , т. е. была бы отрицательной.

Поэтому  $\Gamma$  действительно имеет минимум одновременно с  $\gamma$ , что и доказывает справедливость принципа *наименьшего принуждения* или *наименьшего давления*, который мы можем сформулировать следующим образом: для *материальной системы с двусторонними связями без трения, находящейся под действием каких угодно сил, естественное движение отличается от всех остальных, совместных со связями, тем, что для него принуждение со стороны связей, так же как и давление на связь, имеет наименьшее значение, если исключить свободное движение*.

## § 2. Принцип прямейшего пути Герца

4. Геометрические предпосылки. Пусть кривая задана в трехмерном пространстве, отнесенном к прямоугольным декартовым координатам, которые для однообразия будем обозначать через  $x_1, x_2, x_3$ , посредством ее параметрических уравнений  $x_i = x_i(s)$ , где  $s$ , как обычно, обозначает длину дуги. Как известно (т. I, гл. I, § 11), кривизна  $c$  этой кривой определяется соотношением

$$c^2 = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{d^2 x_i}{ds^2} \right)^2;$$

к этому определению мы приходим, обращаясь к сферическому изображению или к индикаторисе касательных и вычисляя предел отношения угла смежности между касательными в двух смежных точках к длине дуги, заключенной между ними.

Все это распространяется и на пространство с каким угодно числом измерений  $n$ , при существенном условии, что речь идет об евклидовом пространстве, так как справедливость указанного вывода зависит от того обстоятельства, что квадрат расстояния между двумя