$\Gamma_1 < \Gamma_n$ и это последнее значение принуждения Γ_1 соответствовало бы некоторому движению, совместному со связями, но отличному от естественного; в этом движении величина γ имела бы значение $\gamma_1 > \gamma_n$. Это приводит, однако, к противоречию, так как, вычитая почленно два уравнения

$$\Gamma_n = \frac{\tau^4}{4}(\gamma_n + (1)), \quad \Gamma_1 = \frac{\tau^4}{4}(\gamma_1 + (1)),$$

мы придем к соотношению

$$\Gamma_n - \Gamma_1 = \frac{\tau^4}{4}(\gamma_n - \gamma_1 + (1)),$$

в котором при допущенных выше условиях левая часть должна была бы быть положительной, а правая, по крайней мере для τ достаточно малого, имела бы знак разности $\gamma_n - \gamma_1$, т. е. была бы отрицательной.

Поэтому Γ действительно имеет минимум одновременно с γ, что и доказывает справедливость принципа *наименьшего принуждения* или наименьшего давления, который мы можем сформулировать следующим образом: *для материальной системы с двусторонними связями без трения, находящейся под действием каких угодно сил, естественное движение отличается от всех остальных, совместных со связями, тем, что для него принуждение со стороны связей, так же как и давление на связь, имеет наименьшее значение, если исключить свободное движение.*

§ 2. Принцип прямейшего пути Герца

4. Геометрические предпосылки. Пусть кривая задана в трехмерном пространстве, отнесенном к прямоугольным декартовым координатам, которые для однообразия будем обозначать через x_1, x_2, x_3, посредством ее параметрических уравнений $x_\nu = x_\nu(s)$, где s, как обычно, обозначает длину дуги. Как известно (т. I, гл. I, § 11), кривизна c этой кривой определяется соотношением

$$c^2 = \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d^2x_\nu}{ds^2}\right)^2;$$

к этому определению мы приходим, обращаясь к сферическому изображению или к индикатрисе касательных и вычисляя предел отношения угла смежности между касательными в двух смежных точках к длине дуги, заключенной между ними.

Все это распространяется и на пространство с каким угодно числом измерений n, при существенном условии, что речь идет об евклидовом пространстве, так как справедливость указанного вывода зависит от того обстоятельства, что квадрат расстояния между двумя

бесконечно близкими точками x_ν и $x_\nu + dx_\nu$ (линейный элемент пространства) определяется евклидовой квадратичной формой

$$\sum_{\nu=1}^{n} dx_\nu^2.$$

Таким образом, для квадрата кривизны какой-нибудь кривой рассматриваемого пространства мы получим выражение

$$c^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{d^2 x_\nu}{ds^2}\right)^2. \tag{9}$$

Пусть дана материальная система из N точек P_i; будем представлять ее конфигурацию в евклидовом пространстве E, имеющем $n = 3N$ измерений, полагая

$$x_{3i-2} = \sqrt{m_i}\xi_i, \quad x_{3i-1} = \sqrt{m_i}\eta_i, \quad x_{3i} = \sqrt{m_i}\zeta_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N). \tag{10}$$

Последовательность ∞^1 конфигураций, принимаемых системой в любом ее движении $x_\nu = x_\nu(t)$, будет представлена ∞^1 точек кривой пространства E, которая называется *траекторией* системы; легко видеть, что квадрат элемента дуги такой траектории пропорционален живой силе системы, если допустить предположение, что пространство является евклидовым. Действительно, равенство

$$ds^2 = dt^2 \sum_{\nu=1}^{N} \dot{x}_\nu^2$$

приводится в силу формул (10) к виду

$$ds^2 = dt^2 \sum_{i=1}^{N} m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = 2\,dt^2 T.$$

5. Принцип прямейшего пути. Предположим, что связи не зависят от времени и что активных сил нет; следовательно, материальная система движется исключительно под действием связей (*движение по инерции*).

В этом случае можно дать замечательное геометрическое истолкование тому обстоятельству, что принуждение Г (п. 3) имеет минимум для действительного движения; это истолкование указано Герцем.

Чтобы прийти к этому истолкованию, заметим, что выражение γ, определенное из формулы (8), которое, как мы видим, имеет минимум вместе с Г, приводится при отсутствии активных сил к виду

$$\gamma = \sum_{i=1}^{N} m_i a_i^2$$

или в силу формул (10) к виду

$$\gamma = \sum_{\nu=1}^{m} \ddot{x}_\nu^2.$$

Тождественно имеем

$$\ddot{x}_\nu = \frac{d^2 x_\nu}{ds^2} \dot{s}^2 + \frac{dx_\nu}{ds} \ddot{s} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

с другой стороны, из тождества

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{dx_\nu}{ds}\right)^2 = 1$$

путем дифференцирования по s получим

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d^2 x_\nu}{ds^2} \frac{dx_\nu}{ds} = 0;$$

поэтому, вспоминая формулу (9), мы придем к новому выражению для γ:

$$\gamma = c^2 \dot{s}^4 + \ddot{s}^2. \tag{8'}$$

После этого вернемся к функции γ, которая при заданном состоянии движения имеет минимум в естественном движении по сравнению со всеми другими, кинематически возможными движениями, и заметим, что так как речь идет о связях, не зависящих от времени, то соответствующие уравнения (2′) будут обязательно однородными ($b_k = 0$) и, кроме того, коэффициенты при $\dot{\xi}_i$, $\dot{\eta}_i$, $\dot{\zeta}_i$ не будут зависеть от t. Поэтому если эти уравнения умножить на dt/ds, то они приведутся относительно $d\xi_i/ds$, $d\eta_i/ds$, $d\zeta_i/ds$, т. е., на основании соотношений (10), относительно dx_ν/ds к линейным однородным уравнениям с коэффициентами, зависящими только от координат x_ν, т. е. от положения системы.

Воспользовавшись теперь представлением движения в евклидовом пространстве E конфигураций, мы увидим, что связи имеют исключительно геометрический характер, т. е. накладывают ограничения только на траектории, но не на закон движения вдоль траектории; этот последний для каждой из возможных траекторий можно выбрать произвольно, не нарушая связей. Так как γ имеет минимум в естественном движении в сравнении со всеми возможными движениями, совместными со связями, то выражение (8′) для γ (в котором $\dot{s}$ имеет значение, определяемое рассматриваемым состоянием движения) позволяет сделать следующие заключения:

1°. $\ddot{s} = 0$, т. е. естественное движение является равномерным, как это можно вывести и из интеграла живых сил (гл. V, п. 30),

который при отсутствии активных сил сводится к следующему:

$$T = \frac{1}{2}\dot{s}^2 = \text{const};$$

2°. c^2 имеет наименьшую допускаемую связями величину.

Следовательно, мы можем сформулировать упомянутый выше *принцип прямейшего пути так: для материальной системы с двухсторонними идеальными и не зависящими от времени связями, на которую не действуют активные силы, естественное движение, начиная от какого-нибудь состояния движения, происходит с постоянной скоростью и так, что во всякий момент кривизна траектории в представляющем пространстве E имеет минимум по сравнению со всеми другими траекториями, совместными со связями.* Эта формулировка представляет собою замечательное распространение принципа инерции (т. I, гл. VII, п. 30) с элементарного случая свободной точки на движение материальных систем с какими угодно связями (при отсутствии активных сил и трения).

Важно добавить, что предположение об отсутствии активных сил с точки зрения Герца не составляет ограничения, так как Герц исходит из основного взгляда, что из механики должно быть изгнано понятие о силе, как понятие примитивное, и все должно быть сведено к действию связей. Следовательно, по Герцу, силы должны входить только в виде реакций связей.

§ 3. Принцип Гамильтона

6. Синхронно-варьированные движения. Во многих случаях оказывается полезным сравнивать с заданным движением M материальной системы так называемые *синхронно-варьированные* движения[1]), обозначая этим названием те воображаемые движения (бесконечно близкие к сравниваемому движению), в которых во всякий момент t положения отдельных точек системы задаются величинами $P_i + \delta P_i$, где P_i соответствует движению M, а δP_i означает какое-нибудь одно из виртуальных перемещений, относящихся к рассматриваемому моменту (и к конфигурации P_i).

Это перемещение δP_i в любой момент можно выбрать произвольно, но связи системы при этом, конечно, не должны быть нарушены; после того как этот выбор сделан, δP_i будут функциями времени, и потому можно считать определенными также и векторы $d\delta P_i/dt$, если δP_i — правильные функции.

Итак, предположим, что для материальной системы определены какое-либо движение M и его синхронно-варьированное движение M_s, и пусть q есть какая-нибудь величина, скалярная или векторная, свя-

---

[1]) Мы употребляем терминологию, введенную Маджи в его Principii di Stereodinamica, Milano, Hoepli, 1903, г. II.