который при отсутствии активных сил сводится к следующему:

$$T = \frac{1}{2}\dot{s}^2 = \text{const};$$

2°. c^2 имеет наименьшую допускаемую связями величину.

Следовательно, мы можем сформулировать упомянутый выше *принцип прямейшего пути так: для материальной системы с двухсторонними идеальными и не зависящими от времени связями, на которую не действуют активные силы, естественное движение, начиная от какого-нибудь состояния движения, происходит с постоянной скоростью и так, что во всякий момент кривизна траектории в представляющем пространстве E имеет минимум по сравнению со всеми другими траекториями, совместными со связями.* Эта формулировка представляет собою замечательное распространение принципа инерции (т. I, гл. VII, п. 30) с элементарного случая свободной точки на движение материальных систем с какими угодно связями (при отсутствии активных сил и трения).

Важно добавить, что предположение об отсутствии активных сил с точки зрения Герца не составляет ограничения, так как Герц исходит из основного взгляда, что из механики должно быть изгнано понятие о силе, как понятие примитивное, и все должно быть сведено к действию связей. Следовательно, по Герцу, силы должны входить только в виде реакций связей.

§ 3. Принцип Гамильтона

6. Синхронно-варьированные движения. Во многих случаях оказывается полезным сравнивать с заданным движением M материальной системы так называемые *синхронно-варьированные* движения[1]), обозначая этим названием те воображаемые движения (бесконечно близкие к сравниваемому движению), в которых во всякий момент t положения отдельных точек системы задаются величинами $P_i + \delta P_i$, где P_i соответствует движению M, а δP_i означает какое-нибудь одно из виртуальных перемещений, относящихся к рассматриваемому моменту (и к конфигурации P_i).

Это перемещение δP_i в любой момент можно выбрать произвольно, но связи системы при этом, конечно, не должны быть нарушены; после того как этот выбор сделан, δP_i будут функциями времени, и потому можно считать определенными также и векторы $d\delta P_i/dt$, если δP_i — правильные функции.

Итак, предположим, что для материальной системы определены какое-либо движение M и его синхронно-варьированное движение M_s, и пусть q есть какая-нибудь величина, скалярная или векторная, свя-

---

[1]) Мы употребляем терминологию, введенную Маджи в его Principii di Stereodinamica, Milano, Hoepli, 1903, г. II.

занная с движением системы, например скорость v_i любой точки P_i или полная живая сила T и т. д. Обозначим через δq вариацию или разность (бесконечно малую), которая в любой момент имеется между значениями q в варьированном движении M_s и в действительном движении M.

Для ближайших выводов важно сейчас же заметить, что для скоростей v_i имеем

$$\delta v_i = \delta \frac{dP_i}{dt} = \frac{d}{dt}\delta P_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \quad (11)$$

В справедливости этих соотношений мы можем убедиться или чисто аналитическим путем, полагая, что в силу самого определения виртуального перемещения операция δ и дифференцирование по времени суть операции, независимые между собой, и потому обладают свойством переместительности, или менее формальным и более прямым путем, замечая, что в любой момент t положения одной и той же материальной точки системы в движениях M и M_s суть P_i и $P_i + \delta P_i$, так что для варьированной скорости, дифференцируя $P_i + \delta P_i$ по времени t, получим выражение

$$v_i + \delta v_i = \frac{dP_i}{dt} + \frac{d}{dt}\delta P_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

вычитая отсюда v_i, мы и получим соотношения (11).

Отметим также, что для живой силы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i \cdot v_i$$

непосредственно находим

$$\delta T = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i \cdot \delta v_i. \quad (12)$$

7. Вариационная формула Гамильтона. Вернемся снова к материальной системе, подчиненной связям, указанным в п. 3, и возьмем опять общее уравнение динамики

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i = 0, \quad (13)$$

которое напишем в виде

$$L' - \sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \delta P_i = 0; \quad (13')$$

здесь для виртуальной работы $\sum_{i=1}^{N} F_i \delta P_i$ активных сил взято обозначение L' вместо прежнего обозначения δL, чтобы сохранить символ δ

для вариаций, испытываемых отдельными механическими величинами при переходе от естественного движения к какому-нибудь синхронно-варьированному движению. Важно теперь же отметить, что только в том случае, когда действующие силы имеют потенциал U, виртуальная элементарная работа L' может быть представлена в виде приращения некоторой механической величины при переходе от сравниваемого движения к синхронно-варьированному движению: $L' = \delta U$.

Если при помощи начальных условий выбирается какое-нибудь движение M системы, то оно, как мы знаем, в любой момент должно удовлетворять уравнению (13′) при всех виртуальных перемещениях δP_i. В частности, уравнение (13′) остается в силе в любой момент для δP_i, соответствующих какому-нибудь синхронно-варьированному движению M_s, во время которого эти δP_i, а вместе с ними элементарная работа L', будут определенными функциями времени. Если теперь проинтегрировать уравнение (13′) между двумя любыми моментами t_0 и t_1, то получится уравнение

$$\int_{t_0}^{t_1} L'\,dt - \sum_{i=1}^{N} m_i \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{a}_i \cdot \delta P_i\,dt = 0. \tag{14}$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание соотношение $\boldsymbol{a}_i\,dt = d\boldsymbol{v}_i$ и уравнения (11), получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{a}_i \cdot \delta P_i\,dt = [\boldsymbol{v}_i \cdot \delta P_i]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}_i \cdot \delta \boldsymbol{v}_i\,dt;$$

на основании соотношения (12) уравнение (14) можно написать в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + L')\,dt = \sum_{i=1}^{N} m_i\,[\boldsymbol{v}_i \cdot \delta P_i]_{t_0}^{t_1}. \tag{14′}$$

Заметим теперь, что, по самому определению виртуальных перемещений, они переводят систему из одной заданной конфигурации, совместимой со связями, в другую, тоже допускаемую связями *в тот же самый момент*; поэтому нулевое перемещение $\delta P_i = 0$ следует рассматривать как виртуальное, каков бы ни был момент, к которому оно относится. Можно представлять себе по отношению к естественному движению M синхронно-варьированное движение M_s таким, что δP_i исчезают в крайние моменты времени t_0 и t_1, но остаются совершенно произвольными в любой другой момент рассматриваемого промежутка времени, лишь бы они были правильными функциями t. Иначе говоря, из бесконечно большого числа синхронно-варьированных движений рассматриваются только те (составляющие также беско-

нечно большое число), которые имеют общие конфигурации с естественным движением M в начале и конце промежутка времени.

Для всякого естественного движения, если синхронно-варьированные движения принадлежат к только что указанному частному классу, уравнение (14) сводится к более простому виду

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + L')\, dt = 0; \tag{15}$$

это и есть та вариационная формула, которая выражает так называемый *принцип* Гамильтона.

До сих пор мы видели только, что уравнение (15) является необходимым следствием общего уравнения (13) динамики. Для оправдания названия *принципа*, приписываемого уравнению (15), мы должны согласно п. 1 доказать и обратное предложение.

Предположим, что для естественного движения M вариационная формула (15) справедлива по отношению к синхронно-варьированным движениям, имеющим те же конфигурации в моменты t_0 и t_1, что и естественное движение M; нужно доказать, что в этом случае для естественного движения справедливо общее уравнение динамики, т. е. что уравнение (15) определяет движение системы.

Мы дадим это доказательство в п. 9, после того как в следующем пункте изложим некоторые вспомогательные соображения.

8. Аналитические предпосылки. Задав для действительного переменного t промежуток времени (t', t'') и взяв внутри него любое значение $\bar{t}$, всегда можно построить многочлен $f(t)$, который при $t = \bar{t}$ принимает заданное значение $\bar{f} \neq 0$ и обращается в нуль любого наперед заданного порядка n для каждого из значений t' и t'' на концах промежутка. Таким, очевидно, будет многочлен

$$f = \bar{f}\,\frac{(t-t')^n\,(t''-t)^n}{(\bar{t}-t')^n\,(t''-\bar{t})^n}.$$

Выбрав промежуток $[t_0, t_1]$, заключающий внутри себя $[t', t'']$, так что $t_0 \leqslant t'$, $t_1 \geqslant t''$, рассмотрим функцию, которая в этом новом промежутке будет равна нулю вместе со своими первыми n производными при $t \leqslant t'$ и $t \geqslant t''$, а в промежутке $[t', t'']$ совпадает с f; таким образом получим в промежутке $[t_0, t_1]$ функцию, непрерывную вместе со своими первыми $n-1$ производными.

Это простое замечание пригодится нам для построения частного типа синхронно-варьированных движений по отношению к любому движению M системы в заданном промежутке времени.

Проекции $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\zeta_i$ виртуальных перемещений δP_i в любой момент определяются некоторой системой линейных однородных уравнений

$$B_k \equiv \sum_{k=1}^{N} (a'_{ki}\,\delta\xi_i + a''_{ki}\,\delta\eta_i + a'''_{ki}\,\delta\zeta_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

поэтому для любого момента t и для любой соответственно возможной конфигурации наиболее общие выражения вариаций $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\zeta_i$ можно представить в виде линейных комбинаций с неопределенными множителями λ. Чтобы ввести синхронно-варьированное движение для заданного движения M, достаточно указать выражения множителей λ в функции времени t.

Если теперь, выбрав внутри промежутка времени $[t_0, t_1]$ произвольный момент $\bar{t}$, включим это $\bar{t}$ в какой-нибудь частичный промежуток $[t', t'']$ и из всех виртуальных перемещений, относящихся к моменту $\bar{t}$, выберем одно, соответствующее значениям $\bar{\lambda}$ произвольных множителей, то мы всегда сможем, как было сказано выше, предположить, что эти множители определены как непрерывные функции времени и притом так, что при $t = \bar{t}$ они принимают как раз значения $\bar{\lambda}$, и потому дают заданное виртуальное перемещение и, наоборот, будут постоянно равны нулю при $t \leqslant t'$, $t \geqslant t''$ (вместе со своими производными до какого-нибудь наперед установленного порядка).

Синхронно-варьированным движением, которое таким образом определено, мы воспользуемся в следующем пункте.

9. Вывод общего уравнения динамики из вариационной формулы Гамильтона. Как было сказано в п. 7, мы должны доказать, что если для определенного движения M системы, по отношению ко всем синхронно-варьированным движениям, имеющим одни и те же конфигурации на концах промежутка, справедливо (15), то в силу этого, как необходимое следствие, будет справедливо и общее уравнение динамики (13).

Для этой цели заметим сначала, что так как виртуальные перемещения δP_i предполагаются равными нулю в моменты времени t_0 и t_1, то уравнению (15) можно придать вид (14′), после чего, выполнив снова в обратном порядке формальные переходы п. 7, мы возвратимся к уравнению (14), которое можно написать в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta\, dt = 0, \qquad (14'')$$

где для краткости мы обозначили через Δ левую часть общего уравнения динамики (13′) или (13). Таким образом, нам надо доказать, что если имеет место уравнение (14″) при каком-нибудь выборе синхронно-варьированного движения с теми же самыми конфигура-

циями на концах, что и в естественном движении, то Λ в любой момент исчезает при каком угодно виртуальном перемещении (относящемся к рассматриваемому моменту и к конфигурации, принимаемой системой в движении M).

Это есть простое следствие из того обстоятельства, что все аргументы, от которых зависит Λ (силы, ускорения, виртуальные перемещения), суть непрерывные функции времени. Действительно, выбрав один какой-нибудь момент $\bar{t}$ в промежутке (t_0, t_1) (открытый промежуток) и задав какое-нибудь виртуальное перемещение δP_i (между теми, которые относятся к моменту $\bar{t}$ и к одновременной конфигурации системы в движении M), обозначим через $\bar{\Lambda}$ соответствующее значение Λ, которое, как мы сейчас покажем, равно нулю. Из предыдущего пункта следует, что если заключить момент $\bar{t}$ в некоторый промежуток $[t', t'']$, внутренний для промежутка (t_0, t_1), то можно бесконечным множеством способов определить в функции от времени бесконечное множество виртуальных перемещений ∞^2 (для последующих конфигураций системы в прямом движении M) и, следовательно, можно определить синхронно-варьированное движение так, чтобы для $t = t_0$ и $t = t_1$ конфигурация системы совпадала с конфигурацией в движении M; виртуальное перемещение при $t = \bar{t}$ будет тождественно с заданным и будет исчезать при $t \leqslant t'$ и $t \geqslant t''$. Соответственно этому Λ при $t = \bar{t}$ принимает значение $\bar{\Lambda}$, а при $t \leqslant t'$ и $t \geqslant t''$ будет равно нулю, так что уравнение (14″) приведется к виду

$$\int_{t'}^{t''} \Lambda \, dt = 0.$$

Так как вследствие непрерывности Λ к левой части применима формула о среднем значении, то можно также написать

$$(t'' - t') \Lambda^* = 0,$$

где Λ^* обозначает величину Λ, относящуюся к некоторому моменту t^*, заключенному между t' и t''. Поэтому имеем $\Lambda^* = 0$, а так как это имеет место, сколь бы малым ни был промежуток $[t', t'']$, то заключаем, переходя к пределу, что вследствие непрерывности Λ не может не быть $\bar{\Lambda} = 0$.

Таким образом установлена *полная эквивалентность между общим уравнением динамики* (13) *и вариационной формулой Гамильтона*, которой теперь уже на законном основании можно приписывать название принципа.

Как уже указывалось в общем случае п. 1, формальное различие между двумя уравнениями (13) и (15) дает возможность использовать для составления уравнений движения то или другое из них, смотря по тому, какое является более удобным.

Следует добавить, что формула (15), хотя и включает, в отличие от уравнения (13), интегрирование по времени, однако имеет преимущество благодаря большей краткости, так как помимо виртуальной работы L', которая входит также и в уравнение (13) или (13′), содержит только скорости, входящие неявно через посредство вариации δT живой силы, тогда как в уравнение (13) входят явно ускорения отдельных точек.

10. Случай консервативных сил. Принцип Гамильтона приобретает особенно простую и наглядную форму, когда силы, действующие на материальную систему, имеют потенциал U. При этом предположении, как уже было отмечено в п. 7, виртуальная работа L' не отличается от вариации (полного дифференциала) δU, которую испытывает потенциал при переходе от естественного движения к синхронно-варьированному движению. Поэтому, принимая во внимание свойство переместительности операций варьирования и дифференцирования (δ и d/dt), а следовательно, также и операций варьирования и интегрирования по времени, мы будем тождественно иметь

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + L')\,dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\,dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\,dt,$$

где опять появляется кинетический потенциал или функция Лагранжа $\mathfrak{L}$ (гл. V, п. 40). Обозначив через S (*главная функция Гамильтона*, см. п. 27) интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\,dt, \tag{16}$$

мы можем придать принципу Гамильтона в этом случае следующий вид:

$$\delta S = 0. \tag{15′}$$

Для истолкования этого результата заметим, что интеграл S принимает вполне определенное значение при всяком кинематически возможном движении (естественном или фиктивном), определенном для заданной системы от момента t_0 до момента t_1. Заметим, что S есть функция, зависящая уже не от переменных, а только от некоторого числа функций и как раз от тех, которые входят в уравнения движения.

Далее, уравнение (15′) выражает то обстоятельство, что вариация δ S, испытываемая этим интегралом при переходе от любого естественного движения к какому угодно синхронно-варьированному движению с теми же начальной и конечной конфигурациями, как и в естественном движении, равна нулю. Подобно тому, как в случае какой-нибудь функции f от нескольких переменных x мы заключаем, что обращение в нуль полного дифференциала от f определяет те системы значе-

ний x, для которых функция f принимает стационарное значение, уравнение (15′), пользуясь основными понятиями вариационного исчисления, можно истолковать следующим образом: *для материальной системы с двусторонними связями без трения, находящейся под действием консервативных сил, любое естественное движение можно рассматривать как движение, для которого интеграл* S *имеет стационарное значение по отношению ко всем синхронно-варьированным движениям между теми же самыми начальной и конечной конфигурациями.*

Это и есть формулировка принципа Гамильтона для консервативных систем.

Как в случае функций от многих переменных природа второго дифференциала d^2f позволяет определить, при каких дальнейших условиях имеет место максимум или минимум, так и в вариационном исчислении можно рассмотреть аналогичный вопрос, обращаясь ко второй вариации[1]).

Далее, в случае принципа Гамильтона можно доказать, что при достаточно малых промежутках времени интеграл S для естественного движения не только принимает стационарное значение, но и имеет минимум[2]).

Мы не будем здесь доказывать этого. Отметим только следующее обстоятельство: когда при переходе к синхронно-варьированным движениям начальный и конечный моменты t_0 и t_1 не изменяются, то интеграл S в течение рассматриваемого движения отличается только на постоянный множитель $(t_1 - t_0)$ от среднего значения $[\mathfrak{L}]$ функции Лагранжа; написав

$$[\mathfrak{L}] = [T] - [-U],$$

мы увидим, что принцип Гамильтона в случае консервативных сил можно высказать также в другой форме: *для естественного движения разность между средними значениями кинетической и потенциальной энергии принимает стационарное (именно, минимальное) значение по сравнению с синхронно-варьированными движениями с теми же начальной и конечной конфигурациями.*

С физической точки зрения, это свойство стационарности (и минимума) содержится как частный случай в том принципе *распределения энергии*, который имеет место в статистической механике и, в частности, в кинетической теории газов[3]), в том смысле, что естественное движение, если сравнивать это движение с другими кинематически возможными и имеющими те же конфигурации для $t = t_0$

---

[1]) См., например, Лаврентьев и Люстерник, Курс вариационного исчисления, 1950.

[2]) Ср., например, G. Darboux, Théorie des surfaces, т. II, Paris, стр. 246.

[3]) См. J. H. Jeans, The dynamical Theory of gases, 2-е изд., Cambridge, 1921, стр. 359.

и $t=t_1$, определяется как движение, при котором среднее значение разности между двумя видами энергии, кинетической и потенциальной, имеет наименьшее значение. В явлениях, в которые входит большое число элементов, так что оказываются полезными только средние значения, наблюдается аналогичная тенденция, в некотором смысле даже более подчеркнутая, в отношении распределения энергии между всеми различными степенями свободы, которыми обладает система.

Отметим, наконец, как из того же определения (16) следует, что вычисление S предполагает знание движения, о котором идет речь, и в общем случае требует одной квадратуры. Не лишено интереса замечание, что, если известен полный интеграл $V(q\,|\,t\,|\,\pi)$ уравнения Гамильтона — Якоби, что, как мы знаем, позволяет определить общее решение уравнений движения (предыдущая глава, п. 35), квадратура выполняется. Мы отложим доказательство этого положения до п. 26, где речь будет идти о лагранжевых системах общего вида.

11. Применение принципа Гамильтона к выводу уравнений движения. Возьмем снова принцип Гамильтона в его общей форме (15) и применим его к такой материальной системе, для которой элементарная работа L' активных сил и вариация кинетической энергии δT при переходе от любого естественного движения к какому-нибудь синхронно-варьированному движению между одними и теми же конфигурациями в начале и конце промежутка времени выразятся в виде

$$L'=\sum_{h=1}^{n} A_h\mu_h, \quad \delta T=\sum_{h=1}^{n}(B_h\mu_h+C_h\dot{\mu}_h), \tag{17}$$

где μ суть бесконечно малые произвольные функции времени, подчиненные только одному условию: они должны обращаться в нуль в моменты t_0 и t_1. Непосредственно ясно, как эти предположения подсказываются случаем голономной системы, отнесенной к лагранжевым независимым координатам $q_1, q_2, \ldots, q_n$, так как для такой системы имеем (гл. V, п. 36)

$$L'=\sum_{h=1} Q_h\delta q_h, \tag{18}$$

а вариацию δT живой силы, выраженную в функции от q и $\dot{q}$, на основании свойства переместительности операторов δ и d/dt можно написать в виде

$$\delta T=\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_h}\delta q_h+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q_h\right). \tag{19}$$

Вариации δq_h обращаются в нуль при $t=t_0$ и $t=t_1$, так как они соответствуют синхронно-варьированному движению, для которого начальная и конечная конфигурации совпадают с соответствующими конфигурациями естественного движения.

Предполагая, что выполняются равенства (17), из принципа Гамильтона можно получить уравнение

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{h=1}^{n} \{(A_h + B_h)\mu_h + C_h\dot{\mu}_h\}\, dt = 0.$$

Так как μ_h обращаются в нуль при $t = t_0$ и $t = t_1$, то, интегрируя по частям, найдем

$$\int_{t_0}^{t_1} C_h\dot{\mu}_h dt = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{dC_h}{dt}\mu_h\, dt,$$

после чего можно написать

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{h=1}^{n} \left(A_h + B_h - \frac{dC_h}{dt}\right)\mu_h\, dt = 0.$$

Рассуждение, совершенно аналогичное рассуждению п. 9, приводит к заключению, что функция под знаком интеграла должна обращаться в нуль, а так как μ_h произвольны, то каждый множитель при μ_h должен обращаться в нуль, т. е.

$$\frac{dC_h}{dt} - B_h = A_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \quad (a)$$

Эти уравнения и представляют собой дифференциальные уравнения движения системы.

Для упомянутого выше случая голономной системы, сравнивая уравнения (18) и (19) с уравнениями (17), найдем

$$A_h = Q_h,\ B_h = \frac{\partial T}{\partial q_h},\ C_h = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

и потому

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. уравнения (а) приводятся к уравнениям Лагранжа.

Естественно, что принцип Гамильтона можно применить к выводу дифференциальных уравнений движения также и в более общих случаях; такими будут, например, уравнения движения систем с неголономными связями, изученные нами в § 8 гл. V, или, чтобы указать более конкретный случай, уравнения Эйлера для твердого тела, закрепленного в одной точке и отнесенного, помимо чисто позиционных координат θ, φ, ψ, к проекциям p, q, r угловой скорости, т. е. к трем линейным неинтегрируемым комбинациям производных $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$.

Мы не будем останавливаться на этом и ограничимся ссылкой на классический трактат Кирхгоффа [1]), содержащий все, что касается только что указанных уравнений Эйлера и их обобщений.

§ 4. Вариационная формула Гёльдера. Принцип стационарного действия

12. Асинхронно-варьированные движения. Между естественным движением M и каким-нибудь синхронно-варьированным движением M_s, по определению, существует одно-однозначное соответствие положения s и времени, в силу чего всякой конфигурации P_i, принимаемой системой в естественном движении M, соответствует одна вполне определенная конфигурация $P_i + \delta P_i$ в варьированном движении M_s; при этом предполагается, что обе конфигурации P_i и $P_i + \delta P_i$ достигаются системой в соответствующих движениях одновременно.

В более общем случае можно представить себе, что варьируется также и время, в том смысле, что от синхронно-варьированного движения M_s переходят к другому движению M_a, в котором конфигурация $P_i + \delta P_i$, соответствующая P_i в естественном движении M, будет приниматься системой не в тот же момент t, но в варьированный момент $t + \delta t$, где через δt обозначено бесконечно малое приращение времени, которое изменяется от момента к моменту и, следовательно, является произвольной (но правильной) функцией t. Такое движение M_a по отношению к естественному движению M называется *асинхронно-варьированным движением*.

По самому определению, всякому асинхронно-варьированному движению M_a однозначно соответствует синхронно-варьированное движение M_s, имеющее ту же траекторию и отличающееся от него только законом изменения во времени.

Как и в п. 6 для синхронно-варьированных движений, важно теперь обозначить специальным символом бесконечно малое приращe-

---

[1]) Kirchhoff, Vorlesungen über math. Physik; Mechanik; Leipzig, 1903, лекции VI и XIX. См. также T. Levi-Civita, Forma mista di equazioni del moto che conviene ad una particolare categoria di sistemi meccanici, *Rend. Acc. Lencei* (5), т. XXIV_2, 1925, стр. 235—248, где, между прочим, рассуждения Кирхгоффа представлены в векторной форме.

Густав Роберт Кирхгофф родился в Кенигсберге в 1824 г., умер в Берлине в 1887 г. Преподавал последовательно в университетах Бреславля, Гейдельберга и Берлина и был одним из крупнейших специалистов своего времени по математической физике. Известен тем, что дал теоретические основы спектрального анализа и вместе с Бунзеном разделяет заслугу первого его практического применения. Классическими являются также и его законы о распределении электрических токов в сетях, исследования, относящиеся к принципу Гюйгенса, и принадлежащая ему теория упругих стержней и пластинок. Его лекции по математической физике, собранные в четырех томах, первый из которых (только что цитированный) был отредактирован лично им самим и представляет собою полный трактат по механике, еще и сегодня могут служить примером осторожности и точности изложения.