Мы не будем останавливаться на этом и ограничимся ссылкой на классический трактат Кирхгоффа [1]), содержащий все, что касается только что указанных уравнений Эйлера и их обобщений.

§ 4. Вариационная формула Гёльдера. Принцип стационарного действия

12. Асинхронно-варьированные движения. Между естественным движением M и каким-нибудь синхронно-варьированным движением M_s, по определению, существует одно-однозначное соответствие положения s и времени, в силу чего всякой конфигурации P_i, принимаемой системой в естественном движении M, соответствует одна вполне определенная конфигурация $P_i + \delta P_i$ в варьированном движении M_s; при этом предполагается, что обе конфигурации P_i и $P_i + \delta P_i$ достигаются системой в соответствующих движениях одновременно.

В более общем случае можно представить себе, что варьируется также и время, в том смысле, что от синхронно-варьированного движения M_s переходят к другому движению M_a, в котором конфигурация $P_i + \delta P_i$, соответствующая P_i в естественном движении M, будет приниматься системой не в тот же момент t, но в варьированный момент $t + \delta t$, где через δt обозначено бесконечно малое приращение времени, которое изменяется от момента к моменту и, следовательно, является произвольной (но правильной) функцией t. Такое движение M_a по отношению к естественному движению M называется *асинхронно-варьированным движением*.

По самому определению, всякому асинхронно-варьированному движению M_a однозначно соответствует синхронно-варьированное движение M_s, имеющее ту же траекторию и отличающееся от него только законом изменения во времени.

Как и в п. 6 для синхронно-варьированных движений, важно теперь обозначить специальным символом бесконечно малое приращe-

---

[1]) Kirchhoff, Vorlesungen über math. Physik; Mechanik; Leipzig, 1903, лекции VI и XIX. См. также T. Levi-Civita, Forma mista di equazioni del moto che conviene ad una particolare categoria di sistemi meccanici, *Rend. Acc. Lencei* (5), т. XXIV_2, 1925, стр. 235—248, где, между прочим, рассуждения Кирхгоффа представлены в векторной форме.

Густав Роберт Кирхгофф родился в Кенигсберге в 1824 г., умер в Берлине в 1887 г. Преподавал последовательно в университетах Бреславля, Гейдельберга и Берлина и был одним из крупнейших специалистов своего времени по математической физике. Известен тем, что дал теоретические основы спектрального анализа и вместе с Бунзеном разделяет заслугу первого его практического применения. Классическими являются также и его законы о распределении электрических токов в сетях, исследования, относящиеся к принципу Гюйгенса, и принадлежащая ему теория упругих стержней и пластинок. Его лекции по математической физике, собранные в четырех томах, первый из которых (только что цитированный) был отредактирован лично им самим и представляет собою полный трактат по механике, еще и сегодня могут служить примером осторожности и точности изложения.

ние, которое испытывает какая-нибудь величина q, скалярная или векторная, относящаяся к движению системы, при переходе от естественного движения M к любому асинхронно-варьированному движению M_a. Чтобы избежать смешения в обозначениях, используем здесь символ δ^*, отметив, что, по определению, тождественно имеем $\delta^* P_i = \delta P_i$; поэтому и в более общем случае $\delta^* q$ не отличается от δq всякий раз, когда q будет исключительно позиционной величиной.

Заметим, кроме того, что между dt, дифференциалом времени в естественном движении M, и δt, бесконечно малым приращением, характеризующим связь между соответствующими моментами времени в асинхронно-варьированном движении и в движении M, существует соотношение переместительности

$$\delta dt = d\delta t.$$

Действительно, соответствующие друг другу моменты времени в движениях M и M_a равны t и $t_a = t + \delta t$, а их дифференциалы равны dt и $dt_a = dt + d\delta t$; так как, по самому определению, вариация δdt равна разности $dt_a - dt$, то она как раз совпадает с $d\delta t$.

Но в отличие от того, что имеет место для δ, оператор δ^*, вообще говоря, не обладает свойством переместительности с дифференцированием по времени, как это можно утверждать, оценивая приращение $\delta^* \boldsymbol{v}_i$ скорости $\boldsymbol{v}_i$ любой точки P_i системы. Так как в движении M_a положение $P_i + \delta P_i$ принимается точкой P_i в момент $t + \delta t$, то из самого определения скорости следует

$$\boldsymbol{v}_i + \delta^* \boldsymbol{v}_i = \frac{d(P_i + \delta P_i)}{d(t + \delta t)};$$

разделив числитель и знаменатель на дифференциал dt независимой переменной, найдем

$$\boldsymbol{v}_i + \delta^* \boldsymbol{v}_i = \frac{\dot{P}_i + \frac{d}{dt}\delta P_i}{1 + \frac{d}{dt}\delta t};$$

отсюда, если примем во внимание, что $d(\delta P_i)/dt$ есть не что иное, как $\delta \boldsymbol{v}_i$ в синхронно-варьированном движении, связанном с движением M_a, и что с точностью до бесконечно малых порядка выше первого имеем

$$\frac{1}{1 + \frac{d}{dt}\delta t} = 1 - \frac{d}{dt}\delta t,$$

заключаем, пренебрегая еще одним членом второго порядка, что

$$\delta^* \boldsymbol{v}_i = \delta \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i \frac{d}{dt}\delta t. \tag{20}$$

Пользуясь этим тождеством, можно найти для вариации живой силы $T=\frac{1}{2}\sum_{i=1} m_i v_i \cdot v_i$ выражение

$$\delta^* T = \delta T - 2T \frac{d}{dt} \delta t, \tag{21}$$

которое наравне с выражением (20) для $\delta^* v_i$ дает $\delta^* T$ в виде суммы двух слагаемых, первое из которых есть приращение, которое имела бы живая сила T в синхронно-варьированном движении на той же самой траектории M_a, а второе появляется благодаря асинхронности.

13. Принцип стационарного действия. Возьмем снова формулу (15), выражающую принцип Гамильтона, и подставим в нее вместо вариации δT выражение, которое получается для нее из формулы (21). Таким образом, мы получим уравнение

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta^* T + 2T \frac{d}{dt} \delta t + L'\right) dt = 0, \tag{22}$$

определяющее характеристическое свойство любого естественного движения по отношению к совокупности всех асинхронно-варьированных движений. Это уравнение приобретает особо наглядную форму, если категория асинхронно-варьированных движений, которую надлежит рассматривать, ограничивается подходящим выбором бесконечно малой функции δt от t.

Условимся рассматривать здесь только те асинхронно-варьированные движения, для которых выполняется условие

$$\delta^* T = L'. \tag{23}$$

Эти асинхронно-варьированные движения называются *изоэнергетическими*, так как в случае консервативных сил с потенциалом U уравнение (23) принимает вид

$$\delta^* (T - U) = 0$$

и выражает то обстоятельство, что при переходе от естественного движения к асинхронно-варьированному полная энергия остается неизменной.

С другой стороны, важно отметить, что уравнение (23) не накладывает никаких ограничений на выбор траектории асинхронно-варьированного движения или, если угодно, соответствующего синхронно-варьированного движения. Действительно, как бы ни были заданы δP_i в функциях от времени, уравнение (23), присоединенное к уравнению (21), определяет в функции от t величину $d(\delta t)/dt$ и, следовательно, определяет посредством одной квадратуры само δt.

Поэтому уравнение (22), если его применять только к асинхронно-варьированным изоэнергетическим движениям, сохраняет, без ограни-

чения общности, свою эквивалентность принципу Гамильтона, выраженному, как мы знаем, уравнением (15), поскольку оно имеет место для всех синхронно-варьированных движений.

Теперь, сохраняя предположение (23), приводим уравнение (22) к виду

$$\int_{t_0}^{t_1} 2\left(\delta^* T + T\frac{d}{dt}\delta t\right) dt = 0,$$

а так как количество под знаком интеграла есть не что иное, как $\delta^*(2T\,dt)$ и оператор δ^*, как обладающий свойством распределительности относительно суммы, необходимо обладает свойством переместительности с операцией интегрирования, то можно написать

$$\delta^* A = 0, \tag{24}$$

где положено[1])

$$A = 2\int_{t_0}^{t_1} T\,dt. \tag{25}$$

Величина A, определяемая формулой (25) для всякого возможного движения рассматриваемой материальной системы, носит название *действия*; уравнение (24) выражает то обстоятельство, что для *любого естественного движения действие имеет стационарный характер по сравнению со всеми асинхронно-варьированными изоэнергетическими движениями.*

Обратно, если для некоторого движения M справедливо вариационное условие (24) по отношению ко всем асинхронно-варьированным изоэнергетическим движениям, то достаточно провести в обратном

---

[1]) Чтобы отдать себе отчет формальным путем в переместительном свойстве оператора δ^* относительно операции интегрирования, заметим, что можно бесконечным множеством способов ввести в выражение A, в виде переменной интеграции, вместо t вспомогательный параметр λ, который, в то время как t изменяется от t_0 до t_1, будет изменяться, все время возрастая, от 0 до 1. В силу этого выражение A принимает вид

$$A = 2\int_0^1 T\frac{dt}{d\lambda}\,d\lambda,$$

а так как пределы теперь постоянны, то варьирование δ^* применяется исключительно под знаком интеграла, так что получается

$$\delta^* A = 2\int_0^1 \left(\delta^* T\frac{dt}{d\lambda} + T\frac{d\,\delta t}{d\lambda}\right) d\lambda;$$

теперь достаточно снова взять t за переменную интегрирования, чтобы получить желаемый результат.

порядке выполненные ранее рассуждения, чтобы убедиться, что для M имеет место уравнение (22), т. е. справедлив принцип Гамильтона, так что мы имеем здесь естественное движение рассматриваемой системы.

Эта двойная формулировка, определяющая естественное движение по сравнению с асинхронно-варьированными изоэнергетическими движениями, и составляет так называемый *принцип стационарного действия*; в только что указанной общей форме, обнимающей также и случай неконсервативных сил, формулировка этого принципа принадлежит Гёльдеру[1]).

Что же касается механического истолкования действия A, то заметим, что если написать его в виде

$$A = 2(t_1 - t_0)[T],$$

то оно будет равно *удвоенному произведению продолжительности движения на среднюю величину живой силы*; если, наоборот, примем во внимание известное выражение живой силы посредством скоростей, то найдем

$$A = \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{t_0}^{t_1} v_i \, dP_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{t_0}^{t_1} v_i \, ds_i,$$

где ds_i означает элемент дуги траектории любой точки P_i.

Необходимо отметить, что впервые Мопертюи[2]) ввел понятие действия для случая одной только материальной точки с массой m, относящееся к любой дуге траектории s в виде mvs. Показав неудобство этой оценки действия, Эйлер подставил вместо нее, тоже для случая одной только точки, вышеуказанный интеграл, который потом был обобщен на системы какого угодно числа точек Лагранжем.

Заметим, наконец, что вычисление действия A, как это следует из его определения (25), предполагает знание движения, к которому оно относится, и, вообще говоря, требует одной квадратуры. Но аналогично тому, что имеет место для функции S Гамильтона (п. 10), можно избежать выполнения этой квадратуры, если известен полный интеграл $W(q \mid \pi)$ соответствующего уравнения Гамильтона $H = E$ (п. 38 предыдущей главы).

Доказательство этого последнего утверждения мы отложим также до п. 26, когда мы обратимся вообще к какой угодно лагранжевой системе с кинетическим потенциалом, не зависящим от времени.

---

[1]) Ueber die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis, *Gött. Nachr.*; 1896, стр. 122.

[2]) Пьер Луи Мопертюи родился в С.-Мало в 1698 г., умер в Базеле в 1759 г. Член Парижской академии наук, он был приглашен Фридрихом II к руководству Берлинской академией. Занимался астрономией и механикой. Его сочинения изданы в четырех томах.

14. Случай голономной системы со связями, не зависящими от времени и с консервативными силами. В предположении консервативных сил принцип стационарного действия допускает следующую специальную формулировку, аналогичную той, которая была указана без доказательства в п. 10 для принципа Гамильтона; *для голономной системы со связями, не зависящими от времени, соответствующее действие для какого-нибудь естественного движения между двумя достаточно близкими конфигурациями будет не только стационарным, но и минимальным по сравнению с тем, которое имелось бы для всякого асинхронно-варьированного изоэнергетического движения.* Здесь мы также, чтобы не слишком задерживаться, откажемся от доказательства этого утверждения[1]).

15. Геометрическая интерпретация принципа стационарного действия. Обратимся еще раз к голономной системе со связями, не зависящими от времени, для которой величины $q_1, q_2, \ldots, q_n$ составляют систему независимых лагранжевых координат, и, как это уже не раз делалось нами ранее, представим ∞^n конфигураций точками абстрактного пространства n измерений, в котором величины q истолковываются как самые общие координаты. В этом пространстве можно условно определить *линейный элемент* или элементарное расстояние ds между двумя любыми бесконечно близкими точками q_h и $q_h + dq_h$, полагая

$$ds^2 = \sum_{\substack{h=1\\k=1}} a_{hk}\, dq_h\, dq_k, \tag{26}$$

где a_{hk} суть такие функции от q, конечные и непрерывные вместе со своими первыми и вторыми производными, что квадратичная форма в правой части будет определенной положительной.

Как известно из элементов дифференциальной геометрии, от выбора этого линейного элемента зависят определение длины какой угодно линии (конечной) и остальные основные соотношения (относящиеся к углам, площадям и т. д.), которые позволяют установить всю метрику рассматриваемого пространства. Абстрактное пространство, для которого установлен линейный элемент (26) или, как обычно принято говорить, в котором установлено *мероопределение*, называется метрическим многообразием и будет нами обозначаться через V_n.

В рассматриваемом здесь случае изображающего пространства конфигураций голономной системы элементарный пример одной единственной точки, свободной или удерживаемой на поверхности или на кривой, подсказывает особый выбор мероопределения, который оказывается очень удобным также и в общем случае. Если масса точки предполагается равной единице, то элементарное расстояние ds между

[1]) См., например, Darboux, loc. cit. на стр. 403, п. 545 для элементарного случая двух переменных и п. 568 для какого угодно числа переменных.

двумя бесконечно близкими положениями ее в физическом пространстве, где происходит движение, определяется равенством

$$ds^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\, dt^2,$$

или также, если введем живую силу T, равенством

$$ds^2 = 2T\, dt^2; \tag{27}$$

это и есть то мероопределение, которое удобно принять вообще для изображающего пространства конфигураций какой угодно голономной системы со связями, не зависящими от времени.

Всякое движение, посредством которого материальная система переходит от некоторой начальной конфигурации C_0 к некоторой конечной конфигурации C_1, будет изображаться в определенном таким образом метрическом многообразии V_n некоторой кривой, соединяющей обе точки, изображающие две конечные конфигурации, и имеющей параметрическими уравнениями конечные уравнения, выражающие закон движения $q_h = q_h(t)$. Такая кривая, которая в случае одной единственной точки, свободной или несвободной, тождественна с соответствующей траекторией в физическом пространстве, в общем случае называется *динамической траекторией* системы в том движении, о котором идет речь.

Рассмотрим динамическую (в этом смысле) траекторию c любого естественного движения и сравним ее с аналогичной траекторией c_v какого-нибудь синхронно-варьированного движения с теми же конечными конфигурациями.

Так как виртуальные перемещения для какой угодно конфигурации получаются путем прибавления к координатам произвольных бесконечно малых значений величин δq, то мы непосредственно видим, что траектория синхронно-варьированного движения c_v будет произвольной кривой, бесконечно близкой к кривой c и соединяющей те же начальную и конечную точки. Если далее вспомним, что всякое асинхронно-варьированное движение можно получить из синхронно-варьированного, оставляя неизменными ∞^1 конфигураций и изменяя только момент t прохождения системы через соответствующую этому моменту конфигурацию в синхронно-варьированном движении на $t + \delta t$, то заключаем, что также и для асинхронно-варьированных движений (изоэнергетических или нет) динамические траектории будут вполне произвольными кривыми, лишь бы они были бесконечно близкими к кривой естественного движения и соединяли одни и те же концы.

Обратимся теперь к принципу стационарного действия

$$\delta^* A = 0 \tag{24}$$

и предположим, что силы, действующие на систему, консервативны. При этом предположении имеет место уравнение энергии

$$T - U = E, \tag{28}$$

где, как мы уже знаем, при переходе от некоторого естественного движения к какому-нибудь из асинхронно-варьированных изоэнергетических движений, по отношению к которым удовлетворяется условие стационарности действия (24), полная энергия остается неизменной ($\delta^* E = 0$). Отсюда следует, что из выражения действия можно исключить время и придать ему, таким образом, в метрическом многообразии V_n исключительно геометрическую форму. Действительно, подинтегральное выражение (25) можно написать в виде

$$\sqrt{2T}\sqrt{2T\,dt^2}$$

или на основании формул (27), (28) в виде

$$\sqrt{2(U+E)}\,ds;$$

в силу этого, подставляя вместо текущего переменного t длину дуги s, мы должны распространить интеграцию на динамическую траекторию c движения, к которому относится действие, или, точнее, на ту дугу ее, которая заключена между начальной и конечной конфигурациями C_0 и C_1. Таким образом, будем иметь

$$A = \int_c \sqrt{2(U+E)}\,ds; \tag{25'}$$

а так как теперь исключено всякое влияние закона изменения координат с временем, то принципу стационарного действия можно придать вид

$$\delta A = 0. \tag{24'}$$

Кроме того, если примем во внимание, что, с одной стороны, полная энергия E остается неизменной при переходе от естественного движения к какому-нибудь асинхронно-варьированному изоэнергетическому движению и что, с другой стороны, этот переход в метрическом многообразии V_n равносилен замене динамической траектории естественного движения произвольной бесконечно близкой кривой с теми же концами C_0, C_1, то из принципа стационарного действия (24′) будем иметь, что *динамическая траектория естественного движения между двумя указанными конфигурациями C_0, C_1 при заданном значении энергии будет некоторой кривой метрического многообразия V_n, для которой криволинейный интеграл* (25′) *имеет стационарное* (*или минимальное, если обе конфигурации достаточно близки*) *значение.*

Обратно, всякая кривая метрического многообразия V_n, удовлетворяющая условию стационарности (24′) *по отношению ко всем бесконечно близким кривым с одними и теми же концами, будет динамической траекторией некоторого естественного движения.*

Действительно, достаточно представить себе, что на этой кривой определен закон движения на основании уравнения (28), чтобы, присоединяя к нему уравнение (24′) и выполняя в обратном порядке

предыдущий переход, можно было возвратиться к принципу стационарного действия в его первоначальной форме (24).

Эти два утверждения (прямое и обратное), которые по отношению к метрическому многообразию V_n имеют исключительно геометрический характер, выражают принцип стационарного действия для голономных систем со связями, не зависящими от времени, и при наличии консервативных сил.

16. Движения по инерции (спонтанные движения) и геодезические линии. В частном, но очень важном случае движений по инерции (спонтанных движений), т. е. движений при отсутствии активных сил $U = \text{const}$, динамические траектории, как было указано в п. 63 гл. V, называются геодезическими линиями метрического многообразия V_n. Из предыдущего пункта следует, что они определяются свойством делать стационарным (или, в частности, минимальным при достаточно близких концах) криволинейный интеграл

$$\int_c ds, \tag{25''}$$

т. е. длину дуги, вычисляемую в согласии с установленной метрикой для V_n.

Это заключение будет особенно наглядным в случае одной материальной точки, удерживаемой на некоторой поверхности σ и движущейся без трения при отсутствии активных сил. В этом случае, как было уже отмечено в предыдущем пункте, метрическое многообразие V_2 будет тождественно с поверхностью σ, на которой удерживается точка, а динамическая траектория совпадает с кривой, действительно пробегаемой точкой на поверхности σ. На основании соображений п. 44 гл. II динамические траектории движения точки по инерции, названные геодезическими линиями поверхности, определяются тем дифференциальным свойством, что соприкасающаяся плоскость в каждой точке траектории нормальна к поверхности σ. К тому, что было известно ранее, мы можем теперь добавить, что геодезические линии обладают интегральным свойством, характеризующим их и заключающимся в том, что всякая дуга геодезической линии имеет стационарную, а для достаточно близких концов — минимальную длину по сравнению со всеми кривыми, которые можно провести на поверхности между теми же концами.

Возвращаясь к случаю какого угодно числа n степеней свободы, вспомним замечание, сделанное в пп. 62, 63 гл. V, что для голономной системы со связями, не зависящими от времени, которая находится под действием консервативных сил, траектории, вообще говоря, зависят от $2n-1$ постоянных, тогда как в случае движения по инерции, и только в этом случае, число траекторий (геодезические линии соответствующего метрического многообразия V_n) сводится к ∞^{2n-2}.

Это уменьшение числа произвольных постоянных мы можем доказать иначе, обращаясь к вариационному уравнению (24′), которое, как мы видели в предыдущем пункте, определяет все динамические траектории. Всякий раз, когда потенциал U является действительно функцией, уравнение (24′) содержит в виде параметра постоянную E энергии, но для движений по инерции, поскольку радикал $\sqrt{2(U+E)}$ приводится к постоянной, оно принимает вид

$$\delta \int_c ds = 0,$$

в котором E исчезает.

Из рассуждений п. 63 гл. V, основанных на теореме существования интегралов, следует, что $2n-2$ произвольными постоянными можно воспользоваться для определения геодезической линии, накладывая на нее условие прохождения через произвольно заданную точку в произвольно заданном направлении. Добавим еще, что можно определить эти постоянные так, чтобы были удовлетворены какие-нибудь другие $2n-2$ условий, лишь бы они были совместными между собою; например, можно заставить геодезическую линию пройти через две различные точки (достаточно близкие).

17. Связка динамических траекторий. В случае любых консервативных сил ($U \neq \text{const}$), когда совокупность динамических траекторий зависит от $2n-1$ произвольных постоянных, совокупность тех из них, для которых полная энергия имеет некоторое заданное значение E, зависит от $2n-2$ постоянных и имеет, следовательно, ту же кратность, что и геодезические линии некоторого метрического n-мерного многообразия V_n.

Такая частичная совокупность динамических траекторий называется *связкой*; при этом имеет место то замечательное обстоятельство, что *всякая связка динамических траекторий какой-нибудь динамической задачи с консервативными силами, определяемая некоторым мероопределением*

$$\delta s^2 = 2T\,dt^2, \tag{27}$$

тождественна с совокупностью геодезических линий некоторого другого метрического многообразия, в котором линейный элемент определяется равенством

$$ds_1^2 = 2(U+E)\,ds^2. \tag{27′}$$

Это непосредственно следует из равенств (24′), (25′), так как вариационное уравнение $\delta A = 0$, которое при $E = \text{const}$ определяет связку траекторий для данной задачи, в силу уравнения (27′) можно написать в виде

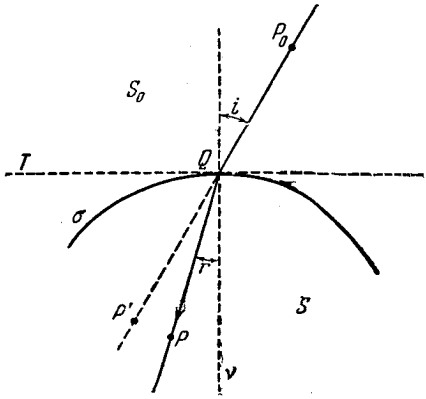
$$\delta \int_c ds_1 = 0,$$

и потому оно как раз определяет совокупность ∞^{2n-2} геодезических линий метрического многообразия с линейным элементом (27′).

18. Приложение к геометрической оптике. Рефракция и мираж[1]). а) *Общие соображения. Закон рефракции. Принцип Ферма.* В прозрачной однородной среде свет, как известно, распространяется по прямым линиям с постоянной скоростью. В случае изотропии, который мы исключительно и будем иметь в виду, скорость всегда одна и та же во всех направлениях и является, следовательно, характеристической постоянной среды. Для воздуха (приблизительно также и для межпланетного пространства) эта постоянная, как известно, равна в круглых цифрах

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек},$$

или 300 000 *км* в секунду.



Фиг. 29.

Если, наоборот, речь идет о неоднородной среде, в которой *показатель преломления* n, т. е. величина, обратная скорости распространения света, изменяется от точки к точке, лучи света распространяются, вообще говоря, не прямолинейно, но искривляются по закону, зависящему от закона изменения n с изменением места, т. е. от природы функции $n(x, y, z)$, где x, y, z обозначают декартовы прямоугольные координаты любой точки в заданной среде.

Для определения хода лучей отправимся от элементарного случая неограниченной среды, состоящей из двух частей S_0, S (фиг. 29), каждая из которых в отдельности однородна, с различными показателями преломления n_0, n, и пусть σ есть поверхность раздела. Как в S_0, так и в S всякий луч распространяется по прямой линии, так что при переходе из одной произвольной точки P_0 среды S_0 в какую-нибудь другую, тоже произвольную, точку P среды S луч следует по пути, составленному из двух последовательных прямолинейных отрезков P_0Q (падающий луч) и QP (преломленный луч), где Q есть некоторая, заранее неизвестная точка поверхности σ. Известно, что для преломления имеют место два экспериментальных закона Декарта[1]).

---

[1]) T. Levi-Civita, Questioni di Meccanica classica e relativista, Bologna, стр. 149—160.

[2]) Ренэ Декарт родился в Тюренне в 1596 г., умер в Стокгольме в 1650 г. Известен не только как философ, но и как математик; пытался построить чисто кинематическое объяснение физического мира и дал первое систематическое изложение аналитической геометрии.

1. Падающий луч P_0Q и преломленный QP лежат в одной и той же плоскости с нормалью r к поверхности σ в точке Q.

2. Положение точки Q на поверхности σ таково, что углы i и r падения и преломления, т. е. углы, образованные с нормалью соответственно падающим и преломленным лучами, ориентированные одинаково с нормалью в сторону распространения света, связаны с показателями преломления уравнением

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n}{n_0}.$$

Оба эти закона заключаются в принципе Ферма [1]), согласно которому свет распространяется вдоль *пути наименьшей продолжительности.*

Действительно, если мы будем искать, каков должен быть путь между точками P_0 и P, то прежде всего очевидно, что в каждой из двух сред S_0 и S, в которых скорость света постоянна, он должен быть обязательно прямолинейным, так что все сводится к определению на поверхности σ точки Q таким образом, чтобы сумма

$$t = n_0 P_0 Q + nQP$$

двух промежутков времени, которые требуются свету для прохождения отрезка P_0Q со скоростью n_0^{-1} и отрезка QP со скоростью n^{-1}, была наименьшей. Условие минимума требует, чтобы было $\delta t = 0$. Если обозначим через ρ_0 и ρ модули векторов $\overrightarrow{P_0Q}$ и $\overrightarrow{QP}$, то можно будет написать

$$t = n_0\rho_0 + n\rho,$$

откуда, дифференцируя и принимая во внимание, что из равенств

$$\rho_0^2 = \overrightarrow{P_0Q}^2, \qquad \rho^2 = \overrightarrow{QP}^2$$

следует

$$\rho_0\delta\rho_0 = \overrightarrow{P_0Q}\cdot\delta Q \quad \text{и} \quad \rho\delta\rho = -\overrightarrow{QP}\cdot\delta Q,$$

заключаем, что условие минимума определяется равенством

$$\delta t = \left(n_0\frac{\overrightarrow{P_0Q}}{\rho_0} - n\frac{\overrightarrow{QP}}{\rho}\right)\cdot\delta Q = 0$$

---

[1]) Пьер Ферма родился в 1608 г. близ Тулузы, умер в том же городе в 1665 г. Был судьей и вел обширную переписку с великими учеными своего времени. Известен открытиями в теории чисел, был предшественником творцов аналитической геометрии и анализа бесконечных малых, некоторые способы которых он применял к задачам геометрии и физики. Полное собрание его сочинений издано в недавнее время (Париж, 1891—1922) в пяти томах.

или также равенством

$$n_0 \frac{\overrightarrow{P_0Q}}{\rho_0} - n \frac{\overrightarrow{QP}}{\rho} = \lambda N, \tag{29}$$

где λ есть скаляр, а N — единичный вектор нормали к поверхности σ, ориентированный, например, в сторону среды S.

Отсюда непосредственно следует компланарность трех векторов $\overrightarrow{P_0Q}$, $\overrightarrow{QP}$, N, т. е. первый закон Декарта.

Далее, если рассмотрим касательную QT к поверхности σ в точке Q на плоскости P_0QP, направленную так, чтобы она составляла острый угол с продолжением QP' падающего луча, то увидим, что проекция на нее единичного вектора $\overrightarrow{P_0Q}/\rho_0$ равна $\sin i$, а проекция вектора $\overrightarrow{QP}/\rho$ равна $\pm \sin r$, где знак плюс будет иметь место, если преломленный луч образует острый угол, и минус — если тупой, т. е. смотря по тому, находится ли этот луч с той же стороны относительно нормали к σ в точке Q, что и продолжение QP' падающего луча, или нет.

Так как уравнение (29) после проектирования на QT приводится к равенству

$$n_0 \sin i \mp n \sin r = 0,$$

то мы видим, что следует принять верхний знак, так как преломленный луч лежит с одной стороны от нормали с продолжением падающего луча; и, таким образом, мы приходим ко второму закону Декарта

$$\frac{n}{n_0} = \frac{\sin i}{\sin r}.$$

б) *Среда, состоящая из многих однородных слоев, и предельный случай. Вариационная формула, получающаяся на основании принципа Ферма.* Предыдущее заключение распространяется и на случай среды, образованной каким угодно числом $m+1$ слоев, лишь бы они были однородными, но с показателями преломления $n_0, n_1, \ldots$ $\ldots, n_{m-1}$, различными между собой, и были разделены каждый от следующего соответственно поверхностями $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$. Световой луч, чтобы пройти от некоторой точки P_0 первого слоя до точки P последнего, должен будет последовательно пересечь эти поверхности в m заранее неизвестных точках $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$. Принцип Ферма требует прежде всего, чтобы луч распространялся вдоль ломаной линии с прямолинейными звеньями $P_0\ Q_1, \ldots, Q_m\ P$; кроме того, он требует, чтобы была минимальной продолжительность распространения

$$t = n_0 P_0 Q_1 + n_1 Q_1 Q_2 + \ldots + n_{m-1}\ Q_{m-1}\ Q_m + n Q_m P.$$

Как и выше, мы также легко находим, что условие $\delta t = 0$ подчиняет последовательные преломления законам Декарта, так что

принцип Ферма или даже только та его часть, которая выражает необходимые дифференциальные условия для минимума, т. е. $\delta t = 0$, представляется все еще удобным для синтеза явления. Наиболее интересный случай неоднородной среды будет тот, когда показатель преломления n непрерывно изменяется от точки к точке, т. е. когда мы переходим к пределу, отправляясь от только что рассмотренного случая дискретных слоев. Представим себе в заданной среде некоторое число поверхностей семейства

$$n(x, y, z) = \text{const},$$

достаточно близких для того, чтобы при переходе от каждой из них к следующей показатель преломления оставался приблизительно постоянным. В гипотетической среде, в которой n оставалось бы строго постоянным в отдельных слоях и подвергалось бы внезапным изменениям при переходе через разделяющие их поверхности, световой луч пробегал бы ломаную линию, определяемую принципом Ферма. Можно перейти к пределу, предполагая, что число слоев неограниченно возрастает, и допуская, что тот же самый принцип продолжает оставаться в силе даже и в случае показателя преломления $n(x, y, z)$, изменяющегося непрерывно. Если обозначим через ds элемент дуги любого светового луча, распространяющегося в этой среде, то nds, очевидно, представит элемент времени, требующийся свету для пробега пути ds. Принцип Ферма выражается в том геометрическом условии, что неизвестная кривая, проходимая световым лучом между двумя заданными точками P_0 и P, соответствует минимуму продолжительности распространения, т. е. для нее интеграл

$$\int\limits_{P_0P} nds$$

имеет наименьшее значение.

Отвлекаясь также и здесь от качественных добавочных условий, которые требуются для существования действительного минимума, и ограничиваясь выражением того, что обращается в нуль первая вариация, мы можем заключить, что *геометрическая оптика некоторой среды, в которой показатель преломления есть какая-нибудь функция $n(x, y, z)$ точки, непрерывная и дифференцируемая столько раз, сколько необходимо, в основном содержится в вариационной формуле*

$$\delta \int nds = 0. \tag{30}$$

в) *Тождество между световыми лучами и связками динамических траекторий консервативных задач.* Пользуясь методами вариационного исчисления, из равенства (30) можно вывести дифференциальные уравнения, эквивалентные этому равенству; интегрируя эти дифференциальные уравнения, мы получим действительный ход

светового луча между двумя какими угодно точками среды. Но можно не делать прямого вычисления, если воспользоваться динамической эквивалентностью, непосредственно подсказываемой изложенными в пп. 15 и 17 рассуждениями о принципе стационарного действия.

Сопоставим с формулой (30) формулы (24′), (25′); точнее, рассмотрим наряду с вопросом оптики элементарную динамическую задачу о движении свободной материальной точки (с массой, равной 1), находящейся под действием консервативной силы, имеющей потенциал $U(x, y, z)$. Любая связка динамических траекторий такой задачи определяется (п. 17) вариационной формулой

$$\delta \int \sqrt{2(U+E)}\, ds = 0$$

где ds, как и в формуле (30), есть элемент дуги в обычном смысле, а E обозначает произвольно заданную постоянную. Так как эта формула будет тождественна с формулой (30), как только примем

$$U = \frac{1}{2} n^2, \qquad E = 0,$$

то мы видим, что в *среде с переменным показателем преломления* $n(x, y, z)$ *световые лучи представляют собой динамические траектории материальной точки, находящейся под действием силы, являющейся производной от потенциала* $n^2/2$, и именно ту связку траекторий, которая соответствует значению энергии, равному нулю.

Это замечание очень удобно, поскольку оно допускает оптическое истолкование результатов, полученных непосредственно в механической форме.

Так, например, рассмотрим случай, который при подходящих условиях поясняет так называемый мираж Монжа [1]), т. е. случай, когда показатель преломления n изменяется только с высотой; чтобы иметь дело с гипотезой, имеющей большой физический интерес, допустим, что речь идет о медленном изменении n.

Тогда мы можем принять в качестве выражения для n формулу

$$n = n_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right),$$

где n_0 и h означают две постоянные, из которых вторая, имеющая размерность длины, такова, что в области значений, которые подлежат рассмотрению, отношение z/h можно рассматривать как малую величину первого порядка. Тогда, пренебрегая величиною z^2/h^2 и обозначая через g постоянную n_0^2/h, будем иметь

$$\frac{1}{2} n^2 = \frac{1}{2} n_0^2 \left(1 + 2\frac{z}{h}\right) = \frac{1}{2} n_0^2 + gz.$$

---

[1]) См., например, A. Garbasso, Il miraggio, *Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino*, т. LVII, 1906, стр. 1 — 57.

Световые лучи совпадают, таким образом, с такими траекториями динамической задачи, потенциал которых $n^2/2$ есть линейная функция z. Эта линейная зависимость потенциала только от z означает, что сила параллельна оси z и имеет постоянную величину g. Мы приходим таким образом, за исключением только численного значения величины g, к элементарному случаю движения тяжелой точки; световые лучи, если они не вырождаются в прямые, также будут параболами с осью, параллельной оси z, и с вогнутостью в направлении силы, т. е. в направлении, в котором возрастает n.

§ 5. Распространение вариационных принципов на общие лагранжевы системы

19. Распространение принципа Гамильтона. Известно, что для голономной системы, находящейся под действием консервативных сил, общее уравнение динамики равносильно уравнениям Лагранжа (гл. V, п. 40).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h} = 0. \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{31}$$

где $\mathfrak{L} = T + U$. С другой стороны, как мы видели в пп. 10, 11, то же общее уравнение равносильно принципу Гамильтона. Отсюда следует, что для голономной системы, находящейся под действием консервативных сил, мы имеем полную эквивалентность между уравнениями Лагранжа (31) и условием исчезновения вариации δS интеграла Гамильтона

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\, dt \tag{16}$$

при переходе от любого естественного движения к какому-нибудь синхронно-варьированному движению с теми же конфигурациями на концах.

Здесь мы хотим показать, что такая эквивалентность существует и в более общем случае для всевозможных лагранжевых систем (31) с какой угодно функцией $\mathfrak{L}(q \mid \dot{q} \mid t)$.

Мы начнем с вычисления явного выражения вариации δS при переходе от любого решения σ уравнений (31)

$$q_h = q_h(t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

к n бесконечно близким синхронно-варьированным функциям вида

$$q_h = q_h(t) + \delta q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где δq_h обозначают бесконечно малые произвольные функции переменного t; для удобства выражения условимся пользоваться механической терминологией, говоря о времени t, о движении σ,