Световые лучи совпадают, таким образом, с такими траекториями динамической задачи, потенциал которых $n^2/2$ есть линейная функция z. Эта линейная зависимость потенциала только от z означает, что сила параллельна оси z и имеет постоянную величину g. Мы приходим таким образом, за исключением только численного значения величины g, к элементарному случаю движения тяжелой точки; световые лучи, если они не вырождаются в прямые, также будут параболами с осью, параллельной оси z, и с вогнутостью в направлении силы, т. е. в направлении, в котором возрастает n.

§ 5. Распространение вариационных принципов на общие лагранжевы системы

19. Распространение принципа Гамильтона. Известно, что для голономной системы, находящейся под действием консервативных сил, общее уравнение динамики равносильно уравнениям Лагранжа (гл. V, п. 40).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h} = 0. \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{31}$$

где $\mathfrak{L} = T + U$. С другой стороны, как мы видели в пп. 10, 11, то же общее уравнение равносильно принципу Гамильтона. Отсюда следует, что для голономной системы, находящейся под действием консервативных сил, мы имеем полную эквивалентность между уравнениями Лагранжа (31) и условием исчезновения вариации δS интеграла Гамильтона

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\, dt \tag{16}$$

при переходе от любого естественного движения к какому-нибудь синхронно-варьированному движению с теми же конфигурациями на концах.

Здесь мы хотим показать, что такая эквивалентность существует и в более общем случае для всевозможных лагранжевых систем (31) с какой угодно функцией $\mathfrak{L}(q \mid \dot{q} \mid t)$.

Мы начнем с вычисления явного выражения вариации δS при переходе от любого решения σ уравнений (31)

$$q_h = q_h(t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

к n бесконечно близким синхронно-варьированным функциям вида

$$q_h = q_h(t) + \delta q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где δq_h обозначают бесконечно малые произвольные функции переменного t; для удобства выражения условимся пользоваться механической терминологией, говоря о времени t, о движении σ,

о синхронно-варьированном движении σ_s и т. д. В этой связи мы будем называть траекториями кривые c, c_v, представляющие решения σ, σ_s в абстрактном пространстве Γ_n координат q.

Как и в п. 6, имеем

$$\delta \dot{q}_h = \frac{d}{dt}\delta q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

поэтому, на основании теоремы о полном дифференциале и так как, поскольку речь идет о синхронной вариации, время не варьируется, имеем также

$$\delta \mathfrak{L} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h}\delta q_h + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\frac{d}{dt}\delta q_h\right). \tag{32}$$

Если теперь применим к интегралу (16) операцию варьирования δ (при вычислении вариации нужно учесть, что время не варьируется и потому знак вариации δ можно внести под знак интеграла) и примем во внимание равенство (32) и тождество

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\frac{d}{dt}\delta q_h\, dt = \left|\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\delta q_h\right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\delta q_h\, dt,$$

то придем к соотношению

$$\delta S = \left[\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{h=1}^{n} \mathfrak{L}_h \delta q_h, \tag{33}$$

где для краткости через $\mathfrak{L}_h$ обозначены левые части уравнений (31) и, как обычно, через p_h — обобщенные количества движения $\partial\mathfrak{L}/\partial\dot{q}_h$. Если конечные конфигурации остаются неизменными, т. е. если δq принимаются равными нулю, как при $t = t_0$, так и при $t = t_1$, то $[p_h \delta q_h]_{t_0}^{t_1} = 0$. В таком случае из уравнений (31), т. е. из уравнений $\mathfrak{L}_h = 0$, следует, что $\delta S = 0$.

Обратно, если при переходе от некоторого движения σ ко всякому возможному синхронно-варьированному движению с одними и теми же конфигурациями на концах имеем $\delta S = 0$, то уравнение (33) дает

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{h=1}^{n} \mathfrak{L}_h \delta q_h = 0;$$

отсюда, учитывая произвольность δq_h при всяком t от t_0 до t_1 (за исключением концов) и рассуждая, как в п. 9, заключаем, что решение σ удовлетворяет лагранжевой системе $\mathfrak{L}_h = 0$.

Поэтому действительно имеется полная эквивалентность, для движения σ, между дифференциальными свойствами, выражаемыми урав-

нениями (31), и вариационным свойством $\delta S = 0$ по отношению ко всем возможным синхронно-варьированным движениям с одними и теми же конфигурациями на концах.

20. Случай не нормальной лагранжевой системы. Задача о геодезических линиях. Только что доказанная эквивалентность, как это следует из формального способа, которым она была установлена, имеет место, какова бы ни была лагранжева система (31). Она, в частности, будет иметь место также и тогда, когда функция $\mathfrak{L}$ не будет зависеть от t и будет однородной первой степени относительно q. В п. 41 гл. V мы видели, что в этом случае соответствующая система Лагранжа (31) не будет нормальной (т. е. не будет разрешимой относительно n вторых производных от q), так как между левыми частями уравнений (31) существует тождественное линейное соотношение

$$\sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \mathfrak{L}_h = 0;$$

на лагранжевых системах этого типа и в особенности на эквивалентных им гамильтоновых системах (однородные канонические системы) мы останавливались в упражнениях предыдущей главы (упражнения 2, 10—15).

Здесь мы покажем, как, пользуясь эквивалентностью между данной дифференциальной системой и вариационным условием

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\, dt = 0,$$

можно легко снова доказать, что уравнения (31) в рассматриваемом здесь случае сводятся только к $n-1$ уравнениям, независимым между собой. Таким образом, мы убедимся в том, что система (31) в этом случае все еще может быть приведена к лагранжевой системе, содержащей только $n-1$ неизвестных функций.

Действительно, так как функция $\mathfrak{L}(q \mid \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ однородная первой степени относительно $\dot{q}$, то подинтегральное выражение $\mathfrak{L}\, dt$ можно написать в форме $\mathfrak{L}(q \mid dq_1, \ldots, dq_n)$, в силу чего предыдущее вариационное условие принимает вид

$$\delta S = \delta \int_c \mathfrak{L}(q \mid dq_1, dq_2, \ldots, dq_h) = 0, \tag{34}$$

где c представляет в пространстве конфигураций Γ_n траекторию любого движения σ, соответствующую промежутку времени от t_0 до t_1. Если затем вдоль c мы примем за независимую переменную одну из переменных, например q_n, и обозначим через $\overset{0}{q}_n$, $\overset{1}{q}_n$ соответствующие

начальное и конечное значения, то уравнению (34) можно будет придать вид

$$\delta \int_{q_n^0}^{q_n^1} \mathfrak{L}\left(q \,\middle|\, \frac{dq_1}{dq_n}, \frac{dq_2}{dq_n}, \ldots, \frac{dq_{n-1}}{dq_n}, 1\right) dq_n = 0; \tag{34'}$$

если, наконец, согласно п. 19, вычислим явно эту вариацию при условии не варьировать независимое переменное q_n, то придем к $n-1$ уравнениям в форме Лагранжа для $n-1$ неизвестных функций $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ от q_n, которые определяют траектории движения первоначальной системы (31). В самом деле, если представим себе, что варьируется также и независимое переменное q_n, то вычисление, совершенно аналогичное тому, которое мы изложим в п. 21, приводит к введению в явное выражение для δS добавочного члена, тождественно равного нулю в силу только что полученных $n-1$ лагранжевых уравнений (см. уравнение (40) из п. 22); поэтому утверждение, что вариационное условие $\delta S = 0$ и, следовательно, эквивалентная ему система (31) сводятся в этом случае к $n-1$ лагранжевым уравнениям, не зависящим от t, оказывается полностью доказанным. Наконец, можно сказать, что особый характер системы (31), рассмотренной здесь, выражается в том обстоятельстве, что она дает возможность определить для соответствующих движений траекторию, но оставляет неопределенным закон движения по ней.

Из предыдущих рассуждений можно получить интересное следствие, если к условию $\delta S = 0$ (способом, аналогичным способу упомянутого упражнения 10 предыдущей главы) присоединить добавочное уравнение

$$\mathfrak{L}(q \mid \dot{q}) = \text{const} = C. \tag{35}$$

Так как в силу однородности $\mathfrak{L}$ можно написать

$$\mathfrak{L}(q \mid dq_1, dq_2, \ldots, dq_n) = C dt, \tag{35'}$$

то из этого уравнения можно определить закон движения по траектории, после того как мы будем знать ее уравнение, проинтегрировав систему дифференциальных уравнений с одними переменными q.

Здесь следует указать наглядную интерпретацию условия стационарности (34) по отношению к системе дифференциальных уравнений, к которой мы пришли, присоединяя к системе (31) (не нормальной) добавочное уравнение (35). Так как в силу эквивалентного уравнения (35′) функция $\mathfrak{L}(q \mid dq_1, dq_2, \ldots, dq_n)$ пропорциональна dt, то вариационное условие (34) равносильно

$$\delta \int_c dt = 0, \tag{34''}$$

где интеграл, распространенный на траекторию c, есть не что иное, как продолжительность движения между двумя указанными концами траектории, заранее неизвестной. Поэтому вариационное условие (34″) или эквивалентное ему условие (34) выражает, что закон движения, определяемый из уравнения (35), удовлетворяет принципу Ферма (п. 18), т. е. делает минимальной (или, выражаясь точнее, стационарной) продолжительность движения [1]).

Заметив это, перейдем к выводу того следствия, которое, как уже указывалось, можно получить тем же способом, каким немного выше мы сделали определенной систему (31), т. е. путем присоединения последнего уравнения (35). Ясно, что если через $f(\mathfrak{L})$ мы обозначим какую-нибудь заданную функцию от $\mathfrak{L}$, то система

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\, dt = 0, \quad \mathfrak{L} = \text{const} \tag{36}$$

будет равносильна системе

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f(\mathfrak{L})\, dt = 0, \quad \mathfrak{L} = \text{const}; \tag{36'}$$

поэтому соотношения между координатами q, т. е. уравнения траекторий, определяемые из двух различных систем (36) и (36′), должны быть тождественными.

Мы уже видели, что соотношения, не зависящие от t и вытекающие из уравнений (36), равным образом определяются вариационным условием $\delta S = 0$, которое мы можем взять в форме (34); отсюда следует еще, что это условие равносильно совокупности соотношений, не зависящих от t, которые выводятся из уравнения (36). Если, в частности, возьмем $f(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}^2$, то лагранжева система, определяемая из условия

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}^2\, dt = 0,$$

будет, несомненно, нормальной, потому что функция под знаком интеграла по отношению к $\dot{q}$ является однородной функцией второй степени, а не первой. Мы уверены теперь, что траектории, которые получатся в результате присоединения к только что написанному вариационному условию уравнения $\mathfrak{L} = \text{const}$ и исключения t, будут

[1]) Закон движения $\mathfrak{L}(q \mid dq) = dt$, встретившийся при рассмотрении геометрической оптики, в упражнении 13 предыдущей главы, имеет тот же вид, что и уравнение (35′); поэтому можно сказать, что распространение посредством волн, изученное в этом упражнении, подчиняется принципу минимума времени Ферма.

тождественны с теми, которые определены из первоначального соотношения $\delta S = 0$.

Это следствие находит, в частности, применение в задаче об определении геодезических линий какого-либо метрического многообразия V_n (п. 15) с заданным линейным элементом

$$ds^2 = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk} dq_h dq_k.$$

Мы уже видели в п. 16, что эти геодезические линии тождественны с динамическими траекториями движения по инерции голономной системы с живой силой $T = (ds/dt)^2/2$; но в то время как ранее мы пришли к этому заключению после очень длинного ряда выводов, имеющих характер и интерес преимущественно динамический, здесь мы можем снова найти тот же результат почти непосредственно, отвлекаясь от всякой механической теории.

Действительно, речь идет об определении кривых, удовлетворяющих вариационному условию

$$\delta \int_c ds = 0,$$

а так как ds есть однородная функция первой степени относительно дифференциалов dq, то эта задача как раз входит в тип, рассмотренный нами выше, и соответствует случаю, в котором в уравнении (34) функции $\mathfrak{L}$ приписывается значение ds/dt. Если положим

$$\mathfrak{L}^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2T,$$

то в силу только что полученного следствия будем иметь, что искомые геодезические линии совпадают с кривыми, определяемыми соотношениями

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = 0, \quad T = \text{const};$$

так как в силу интеграла живых сил уравнение $T = \text{const}$ влечет за собой уравнение $U = \text{const}$, то мы имеем дело с динамическими траекториями движения по инерции голономной системы с живой силой $T = (ds/dt)^2/2$.

21. Асинхронная вариация интеграла Гамильтона. Возвратимся к лагранжевой системе (31) общего типа. Выражение (33) вариации δS относится к переходу от заданного естественного движения σ к любому его синхронно-варьированному движению σ_s, даже между различными конечными конфигурациями, если δq не предполагаются равными нулю при $t = t_0$ и $t = t_1$. Мы увидим сейчас, какое при-

ращение следует приписать функции S, если, как в п. 12, введем асинхронность, сопоставляя с любым моментом t момент $t+\delta t$, где δt есть произвольная бесконечно малая функция (правильная) времени.

Это приращение интеграла

$$S=\int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L} dt, \tag{16}$$

поскольку в нем можно рассматривать слагаемые, происходящие от отдельных элементов $\mathfrak{L}dt$, и затем суммировать их, будет состоять из слагаемых трех типов: 1) слагаемых $(\partial\mathfrak{L}/\partial t)\,\delta t\,dt$, происходящих от возможного наличия t в функции $\mathfrak{L}$; 2) слагаемых $\mathfrak{L}\delta dt$, тождественных (п. 12) с $\mathfrak{L}d\delta t$; 3) слагаемых, происходящих от того, что в асинхронной вариации приращения $\delta^* \dot{q}_h$ не совпадают с соответствующими приращениями $\delta \dot{q}_h$, а определяются, как это легко проверить способом, указанным в п. 12 для приращений v_i, соотношениями

$$\delta^* \dot{q}_h = \delta \dot{q}_h - \dot{q}_h \delta t \qquad (h=1,2,\ldots,n).$$

Поэтому, вводя обычное соотношение

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\,\dot{q}_h - \mathfrak{L} = H, \tag{37}$$

найдем

$$\delta^* S = \delta S + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}\,\delta t dt - \int_{t_0}^{t_1} H d\delta t;$$

если применим к последнему члену интегрирование по частям и примем во внимание выражение (33) для δS, то увидим, что имеет место тождество

$$\delta^* S = \left[\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h - H\delta t\right]_{t_0}^{t_1} + \Delta, \tag{38}$$

где положено

$$\Delta = \int_{t_0}^{t_1} qt \left\{ -\sum_{h=1}^{n} \mathfrak{L}_h \delta q_h + \left(\frac{dH}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}\right)\delta t \right\}. \tag{39}$$

22. Дальнейшие замечания об обобщении принципа Гамильтона. Если движение σ, к которому относится интеграл Гамильтона S, удовлетворяет лагранжевой системе (31), то на основании выражения (39) имеем $\Delta = 0$, потому что, по предположению, биномы $\mathfrak{L}_h$ обращаются в нуль; с другой стороны, как мы видели в п. 43 гл. V, в качестве следствия из лагранжевых уравнений имеет место соотношение

$$\frac{dH}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{dt} = 0. \tag{40}$$

Поэтому, если от движения σ перейдем к какому-нибудь асинхронно-варьированному движению σ_a *с теми же самыми конфигурациями системы для конечных моментов* ($\delta q_h = \delta t = 0$ для $t = t_0$ и $t = t_1$), то будем иметь на основании тождества (38) $\delta^* S = 0$, и интеграл Гамильтона будет стационарным. Обратно, если движение σ таково, что всякий раз, как мы переходим к асинхронно-варьированному движению между теми же самыми крайними значениями времени и крайними конфигурациями, имеет место равенство $\delta^* S = 0$, из тождества (38) следует $\Lambda = 0$; отсюда посредством уже несколько раз применявшегося рассуждения выводится справедливость для σ во всякий момент времени, заключенный между t_0 и t_1, как лагранжевых уравнений $\mathfrak{L}_h = 0$, так и равенства (40), которое при этом является следствием первых.

Таким образом, принцип Гамильтона распространяется на общие лагранжевы системы даже и по отношению к асинхронно-варьированным движениям, лишь бы они происходили между одними и теми же конфигурациями и за один и тот же промежуток времени.

Заметим, что общее тождество (38) остается, конечно, в силе даже тогда, когда вариация δt, определяющая асинхронность, предполагается не произвольной, а связанной каким-нибудь образом с δq, что приводит к выделению из совокупности асинхронно-варьированных движений некоторого класса движений, определяемых частным законом асинхронности. Однако если, желая применить принцип Гамильтона, положим далее, что крайние конфигурации остаются неизменными ($\delta q_h = 0$ при $t = t_0$ и $t = t_1$), то нельзя требовать, чтобы в соответствии с уже наложенной связью и вариация δt также была всегда равной нулю при $t = t_0$ и $t = t_1$. Мы можем только утверждать, что когда это последнее условие удовлетворяется в силу той же самой связи, определяющей асинхронность, то этим самым будет также обеспечена эквивалентность между лагранжевой системой и вариационным условием $\delta^* S = 0$ по отношению к рассмотренному частному классу асинхронно-варьированных движений между теми же самыми конфигурациями и за тот же промежуток времени.

23. Траектории и связки траекторий. Прежде чем приступить к распространению принципа стационарного действия на какую-нибудь лагранжеву систему с кинетическим потенциалом, не зависящим от времени, удобно привести здесь некоторые новые соображения о соответствующих траекториях. Эти траектории для случая какой угодно системы дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{q}_h = \varphi_h(q \mid \dot{q} \mid t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \quad (41)$$

были определены уже в п. 61 гл. V как такие кривые пространства конфигураций Γ_n, уравнения которых получаются путем исключения независимой переменной t из общего решения уравнений (41). Тогда мы видели, что совокупность этих траекторий представляет собой

множество, зависящее, по меньшей мере, от $2n-2$ произвольных постоянных и самое большее от $2n$; мы отметили уже в упомянутом пункте, что это, естественно, имеет место, в частности, для лагранжевой системы, каков бы ни был кинетический потенциал $\mathfrak{L}(q \mid \dot{q} \mid t)$, лишь бы гессиан этой функции не был тождественно равен нулю.

В том случае, когда $\mathfrak{L}$ не содержит явно t, для лагранжевой системы существует (гл. V, п. 43) обобщенный интеграл энергии

$$H(q \mid \dot{q}) = E, \tag{42}$$

и *связкой решений* называется совокупность, состоящая из ∞^{2n-1} решений, для которой постоянная E имеет какое-нибудь заранее заданное значение. Далее, *связкой траекторий*, как и в динамическом случае (п. 17), называется совокупность соответствующих траекторий.

Рассматривая динамический случай, мы видели в п. 63 гл. V, что когда речь идет о движении по инерции (силы отсутствуют, т. е. $U = \text{const}$), то траектории, истолковываемые как геодезические линии некоторого метрического многообразия V_n (п. 16), составляют множество из ∞^{2n-2} элементов, а с другой стороны, в п. 17 настоящей главы было отмечено, что всякая связка траекторий какой-нибудь консервативной динамической системы тождественна с совокупностью геодезических линий подходящего метрического многообразия. Из того, что и прямое и обратное положения справедливы, следует, что всякая связка динамических траекторий, в случае консервативных сил, зависит точно от $2n-2$ произвольных постоянных.

Здесь мы хотим доказать, что та же самая степень произвола продолжает оставаться в силе для всякой связки траекторий какой угодно лагранжевой системы с кинетическим потенциалом, не зависящим от времени, за исключением случая, который выяснится в последующих рассуждениях.

Для этой цели удобно прежде всего по отношению к нашей лагранжевой системе снова применить способ, которым мы пользовались в п. 61 гл. V для оценки степени произвола совокупности траекторий любой нормальной системы дифференциальных уравнений второго порядка (41). Все сводится к тому, что в качестве независимой переменной вместо t выбирается одна из переменных q, которая, конечно, должна обладать тем свойством, что она не остается постоянной во время движения (в силу чего мы вынуждены, как мы это видели в упомянутом выше пункте, исключить возможные статические решения, которые, очевидно, не представляют интереса для рассматриваемого здесь вопроса). Если q_h есть новая независимая переменная и если обозначим штрихами производные по этой переменной, то преобразованная лагранжева система будет состоять из $n-1$ уравнений вида

$$q''_h = \psi_h(q \mid q'_1, q'_2, \ldots, q'_{n-1} \mid t') \quad (h = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{43}$$

и из аналогичного n-го уравнения, определяющего t''.

Далее, при допущенном здесь предположении, что L не зависит явно от t и потому существует интеграл (42), только что указанное n-ое уравнение можно заменить уравнением $H(q \mid \dot{q}) = E$, лишь бы это последнее уравнение было таким, чтобы из него можно было определить $t' = dt/dq_n$ (в функции от q, q'_1, q'_2, $\ldots$, q'_{n-1} и от постоянной E). Если допустить эту возможность и предположить, что уравнение $H = E$, разрешенное относительно t', принимает вид

$$t' = \chi(q \mid q'_1, q'_2, \ldots, q'_{n-1} \mid E), \tag{42'}$$

то достаточно подставить в уравнение (43) вместо t' это его выражение, чтобы иметь для определения траекторий лагранжевой системы нормальную систему уравнений второго порядка относительно $n-1$ функций q_1, $\ldots$, q_{n-1} от q_n, содержащих в виде параметра постоянную E.

Таким образом, мы видим, что всякий раз, как будет возможно указанное исключение t' посредством уравнения $H = E$, траектории лагранжевой системы будут зависеть, помимо E, от других $2n-2$ произвольных постоянных; это и приводит к заключению, что число траекторий любой связки (соответствующих какому-нибудь заданному значению E) будет ∞^{2n-2}.

Остается еще рассмотреть исключительный случай, когда уравнение $H(q \mid \dot{q}) = E$ неразрешимо в форме (42'). В функцию $H(q \mid \dot{q})$, не зависящую от t, dt входит только через посредство $\dot{q}_h = dq_h \mid dt$, так что указанный исключительный случай представится только тогда, когда функция H зависит от dt лишь кажущимся образом в том смысле, что H не изменится, если dt умножить на произвольный параметр, т. е. когда существует тождество

$$H(q \mid \lambda\dot{q}_1, \lambda\dot{q}_2, \ldots, \lambda\dot{q}_n) = H(q \mid \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n),$$

которое выражает, что H по отношению к $\dot{q}$ является однородной функцией нулевой степени. Если мы хотим возвратиться к кинетическому потенциалу $\mathfrak{L}$ и вспомним определение (37) функции H, то увидим, что для этого необходимо найти наиболее общее выражение для $\mathfrak{L}$, удовлетворяющее линейному относительно $\mathfrak{L}$ и ее производных неоднородному уравнению

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - \mathfrak{L} = H, \tag{44}$$

где H есть однородная функция нулевой степени относительно переменных $\dot{q}$. Известное правило анализа учит, что наиболее общее решение мы найдем, прибавляя к какому-нибудь частному решению

уравнения (44) общий интеграл соответствующего однородного уравнения

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} q_h - \mathfrak{L} = 0,$$

которое определяет функцию $\mathfrak{L}_1$, однородную первой степени относительно $\dot{q}$. Так как функция $\mathfrak{L} = -H$, в силу того, что H есть однородная функция нулевой степени, представляет собой частное решение уравнения (44), то заключаем, что общий интеграл уравнения (44) равен $-H + \mathfrak{L}_1$. Таким образом, в интересующем нас исключительном случае *кинетический потенциал* $\mathfrak{L}(q \mid \dot{q})$, *не зависящий от* t, *является по отношению к* $\dot{q}$ *суммой двух однородных функций, одной — нулевой степени и другой — первой степени.*

24. Обобщение принципа стационарного действия. Рассмотрим любую лагранжеву систему (31) с кинетическим потенциалом $\mathfrak{L}$, не зависящим от t. В динамическом случае (консервативном), как известно, имеем

$$\mathfrak{L} = T + U$$

и, следовательно, всегда

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h = 2T,$$

если $\mathfrak{L}$ не зависит от времени.

Поэтому в качестве естественного обобщения определения (25) на случай произвольной лагранжевой системы (31) с функцией $\mathfrak{L}$, не зависящей от t, назовем действием, относящимся к какому-нибудь решению σ уравнений (31) в течение заданного промежутка времени от t_0 до t_1, интеграл

$$\mathrm{A} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h \, dt, \tag{45}$$

который на основании равенств (37) и (16) можно также написать в виде

$$\mathrm{A} = S + \int_{t_0}^{t_1} H \, dt$$

Так как $\mathfrak{L}$ не зависит от времени, то для системы (31) имеет место обобщенный интеграл энергии $H = E$, поэтому

$$\mathrm{A} = S + E(t_1 - t_0). \tag{45'}$$

Допустим, что интеграл энергии действительно содержит dt, т. е. исключим случай, когда $\mathfrak{L}$ по отношению к $\dot{q}$ является суммой

однородных функций, одна — нулевой степени, а другая — первой (предыдущий пункт).

Заметив это, возьмем в качестве решения системы (31) некоторое решение σ, соответствующее заданному значению постоянной энергии. Применяя операцию асинхронного варьирования к решению σ, получим

$$\delta^* \int_{t_0}^{t_1} H\,dt = \delta^* \{E(t_1 - t_0)\} = [H\delta t]_{t_0}^{t_1} + (t_1 - t_0)\,\delta^* E;$$

откуда, прибавляя почленно это тождество к равенству (38) и принимая во внимание уравнение (45′), мы получим для асинхронной вариации действия при условии $H = E$ выражение

$$\delta^* A = \left[\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h\right]_{t_0}^{t_1} + (t_1 - t_0)\,\delta^* E + \Delta. \tag{46}$$

Эта формула позволяет распространить принцип стационарного действия на общие лагранжевы системы (31) с не зависящим от времени кинетическим потенциалом.

Действительно, предположим, что на движение, удовлетворяющее такой системе, накладывается асинхронная вариация, связанная двумя условиями: она должна быть изоэнергетической, т. е. после варьирования должно сохранять силу уравнение $H = E$ с тем же значением постоянной энергии, что и в движении σ ($\delta^* E = 0$), и должна оставлять неизменными конфигурации на концах ($\delta q_h = 0$, при $t = t_0$ и $t = t_1$). При таких предположениях мы непосредственно из выражения (46) выводим уравнение

$$\delta^* A = 0. \tag{47}$$

Отсюда заключаем, что действие, относящееся к движению σ, является стационарным (если варьированные движения определяются только что указанными асинхронными вариациями). Обратно, если некоторое движение удовлетворяет уравнению $H = E$ и условию стационарности (47) для всякой асинхронной изоэнергетической вариации с одними и теми же конфигурациями на концах, то для него имеет место на основании формулы (46) тождество $\Delta = 0$, из которого посредством обычного рассуждения выводится, что движение σ удовлетворяет лагранжевой системе (31).

Как и в динамическом случае, когда можно было исключить dt элементарным путем (п. 15), и здесь можно дать предыдущему результату более определенную и наглядную форму, исследуя влияние зависимости $\delta^* H = 0$, наложенной на асинхронные вариации.

Так как при введенных с самого начала предположениях относительно функции Лагранжа $\mathfrak{L}$ функция H действительно зависит от dt, условие, что асинхронно-варьированное движение σ_a — изоэнергетическое, т. е. что $\delta^* H = 0$, содержит, конечно, условие

$\delta dt = d\delta t$ и потому не накладывает никакого ограничения на траекторию движения σ_a; оно определяет только, посредством одной квадратуры, вариации асинхронности δt, когда заранее (произвольно) задается соответствующее синхронно-варьированное движение и, следовательно, соответствующая траектория.

Поэтому, обращаясь опять к следствиям, вытекающим из уравнения (46), мы можем заключить, что имеет место полная эквивалентность между лагранжевой системой (31) вместе с уравнением $H = E$ (*связка решений*) и вариационным условием (47), отнесенным к переходу от любой траектории рассматриваемой связки к какой-нибудь бесконечно близкой кривой с теми же концами.

В этом заключении мы имеем обобщение принципа стационарного действия на лагранжевы системы с кинетическим потенциалом $\mathfrak{L}(q \mid \dot{q})$, не зависящим от времени, но в остальном произвольного вида.

Естественно, что мы получим снова динамический случай п. 15, если $\mathfrak{L}$ будет вида $T + U$, где T есть квадратичная форма относительно $\dot{q}$ и U не зависит от обобщенных скоростей.

В рассмотренном здесь общем случае, как и в динамическом случае, можно воспользоваться уравнением $H = E$ для исключения времени t из характеристической вариационной формулы траекторий любой связки с тем, чтобы придать условию $\delta A = 0$ также и формально чисто геометрический вид.

Но действительное исключение времени можно привести в каждом данном случае только на основании явного определения H и $\mathfrak{L}$.

В ближайшем пункте мы проведем вычисления в одном очень простом случае, когда $\mathfrak{L}$ имеет еще, как в динамических задачах, вид $T + U$, но T уже не будет однородной функцией второй степени относительно $\dot{q}$, а будет равна сумме $T_2 + T_1$, где T_2 и T_1 представляют собой формы соответственно второй и первой степени.

25. Действие в случае свободной точки, отнесенной к равномерно вращающимся осям. Рассмотрим свободную точку, которая движется относительно осей $Oxyz$, равномерно вращающихся вокруг оси Oz под действием силы, производной от потенциала, зависящего от x, y, z, но не от t; это соответствует предположению о поле, неизменном относительно движущихся осей, т. е. симметричном относительно оси Oz.

Если ω есть угловая скорость (постоянная) вращения осей $Oxyz$ вокруг Oz, то соответствующие проекции абсолютной скорости движущейся точки определяются, как известно, выражениями $\dot{x} - \omega y$, $\dot{y} + \omega x$, $\dot{z}$; полагая для простоты, что масса точки равна единице, мы будем иметь для однородных слагаемых живой силы известные выражения

$$T_2 = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad T_1 = 2\omega(x\dot{y} - y\dot{x}), \quad T_0 = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2). \quad (48)$$

Член T_0, от которого происходит центробежная сила, можно включить в потенциал U; из равенства

$$L = T_2 + T_1 + U$$

получим

$$\dot{x}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{z}} = 2T_2 + T_1 \tag{49}$$

и, следовательно, на основании определения (37) функции H

$$H = T_2 - U,$$

так что уравнение, которым мы должны воспользоваться для исключения dt из выражения действия, т. е. уравнение

$$T_2 - U = E,$$

имеет тот же вид, что и в случае неподвижных осей.

Вводя элемент траектории $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ и учитывая последнее уравнение и выражение для T_2, находим

$$ds = \sqrt{2(U+E)}\,dt;$$

так как на основании уравнений (45), (49)

$$\mathrm{A} = 2\int_{t_0}^{t_1} T_2\,dt + \int_{t_0}^{t_1} T_1\,dt,$$

то первое слагаемое правой части можно преобразовать, как это делалось в п. 15, в интеграл от $\sqrt{2(U+E)}\,ds$, распространенный на дугу c траектории, заключенной между точками, соответствующими моментам t_0 и t_1, а в интеграле второго слагаемого за текущее переменное также можно принять длину дуги s траектории.

Таким образом, для действия получается чисто геометрическое выражение

$$\mathrm{A} = \int_c \left\{\sqrt{2(U+E)} + 2\omega\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)\right\} ds.$$

26. Замечания о вычислении S и A. Как мы уже упоминали в п. 10, при вычислении интеграла Гамильтона

$$\mathrm{S} = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\,dt,$$

относящегося к любому решению какой-нибудь лагранжевой системы, можно избежать выполнения квадратуры, если известен полный инте-

грал $V(q\,|\,t\,|\,\pi)$ соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби (предыдущая глава, п. 35)

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H(p\,|\,q\,|\,t)=0.$$

Действительно, возьмем тождество (37′) и, записывая его в форме

$$\mathfrak{L}=\sum_{h=1}^{n} p_h\dot{q}_h-H, \tag{37′}$$

будем иметь в виду, что величинам p, q, H приписываются значения, относящиеся к частному решению, для которого нужно вычислить S. Если аналогично предполагается, что постоянным π приписаны значения, соответствующие этому же самому решению, то p_h будут равны $\partial V/\partial q_h$ и $-H$ равно $\partial V/\partial t$; поэтому

$$\mathfrak{L}=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_h}\dot{q}_h+\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{dV}{dt}$$

и, следовательно,

$$\mathrm{S}=V_1-V_0,$$

где V_0, V_1 представляют собой значения V, соответствующие начальным и конечным конфигурациям и моментам.

Аналогичное упрощение, как уже указывалось в п. 13, мы будем иметь для действия

$$\mathrm{A}=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_h}\dot{q}_h dt, \tag{45}$$

когда $\mathfrak{L}$ не зависит от t и предполагается известным полный интеграл $W(q\,|\,t\,|\,E,\ \pi_1,\ \pi_2,\ \ldots\ \pi_{n-1})$ уравнения

$$H(p\,|\,q)=E.$$

Действительно, по определению имеем

$$p_h=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_h}\qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

полагая и здесь, что постоянным E, π в W приписаны значения, соответствующие решению, для которого мы намерены вычислить действие, мы видим, что функция под знаком интеграла в выражении (45) есть не что иное, как dW/dt, так что

$$\mathrm{A}=W_1-W_0.$$

Сделаем последнее замечание. Если иметь в виду случай функции $\mathfrak{L}$, не зависящей от t, то, не предполагая известным полный интеграл,

достаточно отнести S и A к одному и тому же решению и учесть тождество (45′)

$$S = A - E(t_1 - t_0),$$

чтобы видеть, что вычисление S и вычисление A, по существу, одинаковы.

§ 6. Варьированные движения между варьированными пределами

27. Главная функция Гамильтона. В предыдущем параграфе для асинхронных вариаций интеграла S Гамильтона и действия A мы нашли два тождества общего вида:

$$\delta^* S = \left[\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h - H\delta t\right]_{t_0}^{t_1} + \Lambda, \tag{38}$$

$$\delta^* A = \left[\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h\right]_{t_0}^{t_1} + (t_1 - t_0)\,\delta^* E + \Lambda, \tag{46}$$

$$\Lambda = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ -\sum_{h=1}^{n} \mathfrak{L}_h \delta q_h + \left(\frac{dH}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}\right)\delta t \right\}. \tag{39}$$

Но для того, чтобы использовать эти тождества для распространения вариационных принципов на лагранжевы системы какого угодно вида, мы должны были постоянно предполагать неизменными при варьировании крайние конфигурации, между которыми нам нужно было вычислять, вдоль любого решения лагранжевой системы, интеграл S или действие A ($\delta q_h = 0$ при $t = t_0$ и $t = t_1$).

Мы рассмотрим здесь другие важные следствия, которые могут быть выведены из тех же тождеств (38), (46) в более общем случае, когда при варьировании допускаются произвольные перемещения также и для крайних конфигураций. Обращаясь к тождеству (38), заметим, что если принять в качестве естественного движения σ движение, определяемое общим решением лагранжевой системы (31), и отказаться от всякого ограничительного предположения о перемещениях крайних конфигураций, то это тождество приведется к виду

$$\delta^* S = \left[\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h - H\delta t\right]_{t_0}^{t_1}. \tag{50}$$

Это равенство, характерное для решений системы (31) при всех без исключения асинхронных вариациях, выражает принцип Гамильтона и в том случае, когда конечные конфигурации также варьируются.

Мы займемся выводом следствий из этого равенства и их истолкованием.