достаточно отнести S и A к одному и тому же решению и учесть тождество (45′)

$$S = A - E(t_1 - t_0),$$

чтобы видеть, что вычисление S и вычисление A, по существу, одинаковы.

§ 6. Варьированные движения между варьированными пределами

27. Главная функция Гамильтона. В предыдущем параграфе для асинхронных вариаций интеграла S Гамильтона и действия A мы нашли два тождества общего вида:

$$\delta^* S = \left[\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h - H\delta t\right]_{t_0}^{t_1} + \Lambda, \tag{38}$$

$$\delta^* A = \left[\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h\right]_{t_0}^{t_1} + (t_1 - t_0)\,\delta^* E + \Lambda, \tag{46}$$

$$\Lambda = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ -\sum_{h=1}^{n} \mathfrak{L}_h \delta q_h + \left(\frac{dH}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}\right)\delta t \right\}. \tag{39}$$

Но для того, чтобы использовать эти тождества для распространения вариационных принципов на лагранжевы системы какого угодно вида, мы должны были постоянно предполагать неизменными при варьировании крайние конфигурации, между которыми нам нужно было вычислять, вдоль любого решения лагранжевой системы, интеграл S или действие A ($\delta q_h = 0$ при $t = t_0$ и $t = t_1$).

Мы рассмотрим здесь другие важные следствия, которые могут быть выведены из тех же тождеств (38), (46) в более общем случае, когда при варьировании допускаются произвольные перемещения также и для крайних конфигураций. Обращаясь к тождеству (38), заметим, что если принять в качестве естественного движения σ движение, определяемое общим решением лагранжевой системы (31), и отказаться от всякого ограничительного предположения о перемещениях крайних конфигураций, то это тождество приведется к виду

$$\delta^* S = \left[\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h - H\delta t\right]_{t_0}^{t_1}. \tag{50}$$

Это равенство, характерное для решений системы (31) при всех без исключения асинхронных вариациях, выражает принцип Гамильтона и в том случае, когда конечные конфигурации также варьируются.

Мы займемся выводом следствий из этого равенства и их истолкованием.

Для этой цели необходимо обратить внимание на некоторые соображения о функциональной природе интеграла S и прежде всего общего решения лагранжевой системы[1]).

Обратимся исключительно к случаю нормальной лагранжевой системы, для чего, как мы уже знаем, необходимо и достаточно, чтобы, по крайней мере, в рассматриваемой области не был тождественно равен нулю гессиан (гл. V, п. 14)

$$\Delta = \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \right\| \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)$$

лагранжевой функции $\mathfrak{L}$ по $\dot{q}$. В этом случае уравнения $q_h = q_h(t)$, определяющие общее решение, помимо независимой переменной t, содержат $2n$ произвольных постоянных; за такие произвольные постоянные, в силу теоремы о существовании решения, можно принять значения q^0, $\dot{q}^0$ координат и их производных $\dot{q}$ в момент $t = t^0$, принятый за начальный. Однако здесь будет более удобно в качестве постоянных интегрирования рассматривать вместе с q^0 уже не $\dot{q}^0$, а начальные значения p^0 обобщенных количеств движения $p_h = \partial\mathfrak{L}/\partial\dot{q}_h$. Это соответствует тому, что при $\Delta \neq 0$ мы имеем одно-однозначное соответствие между двумя рядами n значений p и $\dot{q}$, и потому безразлично, какие из них будут задаваться произвольно. Следовательно, мы можем написать общее решение системы (31) в виде

$$q_h = \varphi_h(t, t_0 \mid q^0 \mid p^0) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \quad (51)$$

Отсюда вытекают аналогичные равенства для $\dot{q}$, так что, предполагая, что в подинтегральное выражение $\mathfrak{L}dt$ интеграла S вместо q, $\dot{q}$ подставлены эти их выражения, мы увидим, что по выполнении вычислений этот интеграл будет зависеть от $2n+2$ аргументов t_0, t_1, q^0, p^0, которые, по крайней мере в надлежащим образом ограниченной области, можно выбирать произвольно, и, следовательно, они будут независимыми между собой.

Для нашей цели будет удобна дальнейшая замена произвольных параметров, заключающаяся в том, что в выражение, полученное таким образом для S, вместо постоянных p^0 вводятся значения q^1, которые, согласно тем же уравнениям (51), получают координаты q в конечный момент t_1:

$$q_h^1 = \varphi_h(t_1, t_0 \mid q^0 \mid p^0) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n); \quad (51')$$

это возможно только в том случае, если эти последние уравнения будут однозначно разрешимы относительно p^0, по крайней мере при t_1, достаточно близком к t_0.

---

[1]) См. равносильные, но может быть, не так быстро ведущие к цели соображения в книге E. V. Weber, Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem, Leipzig, 1900, стр. 380—382.

Чтобы исследовать, при каких условиях уравнения (51′) можно решить относительно p^0, найдем первые члены разложений в ряды по степеням $t-t_0$ функций φ_h, рассматривая их как решения лагранжевой системы (31) или, что равносильно при условии $\Delta \neq 0$ (гл. X, п. 1), как решения эквивалентной ей гамильтоновой системы (при начальных значениях q^0, p^0 для $t=t_0$)

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \quad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad (h=1, 2, \ldots, n). \tag{31'}$$

Беря только второй ряд n уравнений, непосредственно находим

$$q_h - q_h^0 = (t-t_0)\frac{\partial H(p^0 \mid q^0 \mid t_0)}{\partial p_h^0} + (2), \tag{52}$$

где символом (2) обозначены члены, которые содержат множителями биномы $t-t_0$ с показателем, по меньшей мере, равным 2. Эти уравнения будут разрешимы относительно параметров p^0 (в функции от t_0, q^0, t, q), если не обратится тождественно в нуль функциональный определитель правых частей по отношению к p^0, равный

$$(t-t_0)^n \left\{ \left\| \frac{\partial^2 H(p^0 \mid q^0 \mid t_0)}{\partial p_h^0 \partial p_k^0} \right\| + (1) \right\}.$$

Это выражение при всяком t, отличном от t_0 и достаточно близком к нему, будет только тогда отлично от нуля, когда отличен от нуля для начальных значений p^0, q^0, t_0 гессиан

$$\Delta_1 = \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p_k} \right\| \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)$$

функции H по p. Так как это последнее условие будет, наверное, выполнено в силу тождества $\Delta\Delta_1 = 1$ (гл. X, п. 2) и основного предположения $\Delta \neq 0$, то заключаем, что при этом последнем условии уравнения (52) действительно разрешимы относительно p^0 и определяют выражения p^0 через q^1, а также через t_0, t_1, q^0. Таким образом, мы видим прежде всего, что q^1 не связаны между собой никакими соотношениями и составляют, следовательно, вместе с t_0, t_1, q^0, $2n+2$ независимых между собой аргументов; далее, если в S вместо p^0 подставляются только что указанные выражения, то интеграл S будет функцией от $2n+2$ только что указанных независимых аргументов. Именно этот вид интеграла S и был назван Гамильтоном *главной функцией* (см. п. 10).

После этих предварительных замечаний вернемся к уравнению (50) и заметим, что в силу самого определения асинхронной вариации вариация $\delta^* S$ есть не что иное, как полный дифференциал от S, рассматриваемый как функция от только что указанных аргументов

$$\frac{\partial S}{\partial t_1}\delta t_1 + \frac{\partial S}{\partial t_0}\delta t_0 + \sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial S}{\partial q_h^1}\delta q_h^1 + \frac{\partial S}{\partial q_h^0}\delta q_h^0\right).$$

С другой стороны, из независимости $2n+2$ начальных и конечных параметров вытекает полная произвольность их приращений δt_0, δt_1, δq^0, δq^1; поэтому, приравнивая в обеих частях равенства (50) коэффициенты при этих приращениях и опуская для удобства индексы, получим две системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial q_h}=p_h, \quad \frac{\partial S}{\partial t}=-H, \tag{50'}$$

$$(h=1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_h^0}=-p_h^0, \quad \frac{\partial S}{\partial t_0}=H_0 \tag{50''}$$

где H, H_0, согласно первоначальной определяющей формуле (37), суть функции соответственно от t, q_n, $\dot{q}_n$ и от t_0, q_n^0, $\dot{q}_n^0$; но если представим себе, что в H вместо $\dot{q}$ подставлены их выражения через p, q, t, полученные из уравнений

$$p_h=\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

и в H_0 вместо $\dot{q}^0$ подставлены аналогичные выражения через p^0, q^0, t_0, то H, H_0 можно рассматривать как функции соответственно от p, q, t и от p^0, q^0, t_0.

На основании уравнений (50′) путем рассуждений, аналогичных рассуждениям п. 35 предыдущей главы, мы непосредственно увидим, что функция $S(t\,|\,q;\ t_0\,|\,q^0)$, если в ней рассматривать в качестве независимых переменных аргументы t и q, а в качестве произвольных постоянных — начальные значения q^0, удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q\left|\frac{\partial S}{\partial q}\right|t\right)=0; \tag{53}$$

с другой стороны, из уравнений (50″) аналогично выведем, что та же самая функция S, если в ней за переменные примем аргументы t_0 и q^0, а за произвольные постоянные — аргументы q, удовлетворит уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t_0}-H_0\left(q^0\left|-\frac{\partial S}{\partial q^0}\right|t_0\right)=0. \tag{53'}$$

Это можно выразить, говоря, что предыдущее уравнение Гамильтона — Якоби удовлетворяется по отношению к переменным t_0, q^0 функцией $-S(t\,|\,q;\ t_0\,|\,q^0)$.

Важность этого заключения будет выяснена, когда мы докажем, что оба интеграла $S(t\,|\,q;\ldots)$ и $-S(\ldots,\ t_0\,|\,q^0)$, которые мы таким образом получили для уравнения Гамильтона — Якоби из самой функции $S(t\,|\,q;\ t_0\,|\,q^0)$, фиксируя в ней различным образом независимые переменные (а следовательно, и произвольные постоянные), являются полными.

Речь идет о том, чтобы проверить, согласно определению полного интеграла (п. 35 гл. X), что смешанный функциональный определитель

$$\nabla = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_h \, \partial q_j^0} \right\| \qquad (h, j = 1, 2, \ldots, n)$$

не будет равен нулю. Легко видеть, что это является естественным следствием из нашего основного предположения: $\Delta \neq 0$. Действительно, так как при этом предположении для всякого решения σ лагранжевой системы (31) или эквивалентной ей гамильтоновой системы (31′) имеют силу уравнения (50′), (50″), то ясно прежде всего, что первые n уравнений (50″), которые можно написать в виде

$$-p_j^0 = \frac{\partial S}{\partial q_j^0} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

суть не что иное, как уравнения, которые получатся путем решения относительно p^0 уравнений $q_h = q_h(t \mid q^0 \mid p^0)$ рассматриваемого решения σ, в предположении, что оно определено начальными значениями q и p (вместо q и $\dot{q}$). Отсюда следует, что и, обратно, из только что написанных уравнений можно получить q как функции от t, q^0, p^0, для чего требуется, чтобы не обращался тождественно в нуль функциональный определитель от $-p_j^0$ по q, т. е. смешанный функциональный определитель

$$\nabla = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_h \partial q_j^0} \right\| \qquad (h, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Следует заметить, что исторически указанный выше путь для вывода уравнений (50′), (50″) является в существенных чертах тем, которым Гамильтон пришел к установлению связи между задачей интегрирования уравнений динамики и задачей интегрирования уравнений в частных производных, показав, что если известна главная функция $S(t \mid q;\ t_0 \mid q^0)$, то можно определить посредством одних только операций вида (50′), (50″) общее решение лагранжевой системы (31) или, лучше, соответствующей гамильтоновой системы (31′).

Немного позже Якоби показал, что для достижения той же самой цели нет необходимости рассматривать совокупность двух уравнений с частными производными (53′), (53″) и еще менее необходимо определять главную функцию; достаточно, как это было вполне выяснено в п. 35 предыдущей главы, обратиться только к одному из этих двух уравнений, например к первому, и найти для него *какой-нибудь* полный интеграл.

28. Варьированное действие. Обращаясь к равенству (46), мы можем повторить по отношению к нему все рассуждения, которые были развиты в предыдущем пункте по поводу равенства (38). Уравнение (46) справедливо в том случае, когда кинетический потенциал $\mathfrak{L}$ и, следовательно, функция Гамильтона H явно не зависят от t; но здесь, как и в п. 24, мы предположим, что уравнение $H = E$ действительно содержит dt, для чего, как известно (п. 23), необходимо и достаточно, чтобы функция $\mathfrak{L}$ не являлась суммой двух однородных относительно $\dot{q}$ функций соответственно первой и нулевой степени.

При этом предположении уравнение $\delta^* H = \delta^* E$, так как $\delta^* H$ явно содержит $\delta dt = d\delta t$, не накладывает никаких ограничений ни на вариацию $\delta^* E$ энергии, ни на δq, но определяет только посредством квадратуры вариацию δt, когда произвольно заданы $\delta^* E$, вариации δq (как функции от t) и, следовательно, кривая c_v, бесконечно близкая к траектории c решения σ лагранжевой системы. Естественно, что при более общем предположении надо допустить, что при переходе от траектории c к произвольной бесконечно близкой кривой c_v варьируются также и крайние конфигурации.

Если к любому решению σ лагранжевой системы (31) или соответствующей гамильтоновой системы (31′) применим совершенно общую асинхронную вариацию (даже не изоэнергетическую и с произвольными перемещениями конечных конфигураций), то тождество (46) сведется к тождеству

$$\delta^* A = \Big[\sum_{h=1}^{n} p_h \, \delta q_h\Big]_{C_0}^{C_1} + (t_1 - t_0)\, \delta^* E, \tag{54}$$

где в первом члене правой части, для того чтобы выявить его исключительно геометрический характер, мы подставили вместо конечных моментов t_0, t_1 соответствующие конфигурации C_0, C_1.

Тождество (54), как характеристическое для решений лагранжевой системы, по сравнению со всеми возможными асинхронно-варьированными решениями выражает так называемый *принцип варьированного действия*.

Для его исследования и истолкования полезно обратить внимание, подобно тому, как это было сделано по отношению к равенству (50) предыдущего пункта, на некоторые соображения[1]) о функциональной природе действия

$$\mathrm{A} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h \, dt, \tag{45}$$

---

[1]) T. Levi-Civita e U. Amaldi, Condizioni atte ad assicurare l'indipendenza degli argomenti nella espressione hamiltoniana dell'azione variata, *Rend. Acc. Lincei*, (6), т. I, 1925, стр. 265—272.

относящегося к нашему решению σ, в промежутке времени от t_0 до t_1, с целью показать, что после выполнения вычислений A можно рассматривать как некоторую функцию от E и от координат q^0 и q^1 конечных конфигураций (величины E, q^0 и q^1 составляют в своей совокупности $2n+1$ независимых аргументов).

Применяя прямо равенство (45), мы увидим, что A будет зависеть от t_0, t_1 и от $2n$ произвольных постоянных, которые входят в общий интеграл лагранжевой системы (31) или эквивалентной ей гамильтоновой системы (31′) и которые мы можем отождествить с начальными значениями q^0, p^0 величин q и p. Наоборот, аргументы t_0, t_1 входят в A только в виде бинома $t_1 - t_0$; действительно, так как дифференциальные уравнения не зависят от t, то это переменное появится в решении σ и, следовательно, в функции под знаком A только в виде бинома $t - t_0$; отсюда следует, что после выполнения интегрирования действие A будет зависеть только от $t_1 - t_0$ (но не от t_1 или t_0 в отдельности).

Установив это, мы покажем теперь, что на основании системы $n+1$ уравнений, состоящей из уравнения $H = E$ и из уравнений (52) произвольного решения σ, отнесенных к конечному моменту t_1, и при надлежащем добавочном качественном условии можно выразить однозначно p^0 и $t_1 - t_0$ через q^0, q^1 и E; этим и будет доказано наше утверждение.

Действительно, уравнения (52) при $t = t_1$, если учесть, что H не зависит от t, и все перенести в одну часть, можно написать в виде

$$(t_1 - t_0)\frac{\partial H(p^0 \mid q^0)}{\partial p_h^0} - (q_h^1 - q_h^0) + (2) = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n); \quad (52')$$

теперь все сводится к тому, чтобы определить, при каких условиях не будет тождественно равен нулю функциональный определитель левых частей уравнений (52′) и уравнения

$$H(p^0 \mid q^0) - E = 0 \qquad (55)$$

по отношению к $(n+1)$ аргументам p^0 и $t_1 - t_0$ при t_1, отличном от t_0 и достаточно близком к нему.

Элементы c_{hk} этого функционального определителя для первых n строк и n столбцов $(h, k = 1, 2, \ldots, n)$ определяются на основании уравнений (52′) равенствами

$$c_{hk} = (t_1 - t_0)\frac{\partial^2 H(p^0 \mid q^0)}{\partial p_h^0 \partial p_k^0} + (2) \quad (h, k = 1, 2, \ldots, n);$$

для последнего столбца также на основании уравнения (52′) имеем

$$c_{h,n+1} = \frac{\partial H(p^0 \mid q^0)}{\partial p_h^0} + (1) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

и для последней строки из уравнения (55)

$$c_{n+1,k} = \frac{\partial H(p_0 \mid q_0)}{\partial p_k^0} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n); \qquad c_{n+1,\, n+1} = 0.$$

Для нашей цели достаточно оценить в определителе

$$\| c_{hk} \| \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n+1)$$

члены наинизшей степени относительно бинома $t_1 - t_0$; поэтому очевидно, что для элементов последнего столбца бесполезно учитывать вторые слагаемые (1), так как они дали бы место членам порядка выше того, который в общей сложности дают первые слагаемые. Таким образом, останется окаймленный определитель, который, как известно, сводится к квадратичной форме относительно аргументов $\partial H / \partial p_k^0$, имеющей коэффициентами алгебраические дополнения элементов неокаймленного определителя

$$\| c_{hk} \| \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n);$$

очевидно, что в каждом из этих алгебраических дополнений мы сохраним член наинизшего порядка, пренебрегая в c_{hk} вторыми слагаемыми (2). Окончательно, если введем еще гессиан функции Гамильтона по p_h, т. е.

$$\Delta_1 = \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p_k} \right\| \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

и для краткости положим

$$\Omega = \left| \begin{array}{c|c} \Delta_1 & \begin{matrix} \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_n} \end{matrix} \\ \hline \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \dfrac{\partial H}{\partial p_2} \cdots\cdots \dfrac{\partial H}{\partial p_n} & 0 \end{array} \right|,$$

увидим, что главная часть рассматриваемого определителя приводится к

$$(t_1 - t_0)^{n-1} \Omega^0,$$

где индекс ^{0} стоит для указания того, что вместо p_h, q_h надо подставить их начальные значения. Таким образом, мы заключаем, что искомое условие разрешимости будет заключаться в том, чтобы для начальных значений, которые мы хотим задать, было

$$\Omega \neq 0.$$

Теперь остается только выразить это последнее условие, полученное в „гамильтоновой форме", поскольку в него входят производные от H, через функцию Лагранжа.

Для этой цели заметим, что на основании второго ряда n уравнений системы (31′) элементы $\partial H/\partial p_h$, находящиеся на кайме определителя Ω, можно непосредственно заменить через $\dot{q}_h$; с другой стороны, оба гессиана Δ и Δ_1, соответственно от $\mathfrak{L}$ и H, являются определителями с взаимно обратными элементами (предыдущая глава, п. 2). Отсюда следует, что

$$\Omega = \frac{1}{\Delta} \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}}^{n} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_h} \dot{q}_h \dot{q}_k$$

и для разрешимости системы (52′), (55) относительно p_h и $t - t_0$ достаточно ввести, наряду с уже допущенными ограничениями, условие, что для рассматриваемых начальных значений квадратичная относительно $\dot{q}$ форма

$$\chi = \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_h \dot{q}_k$$

не будет равна нулю.

Конечно, если, ограничиваясь анализом в подходящей окрестности произвольного начального положения q_h^0, мы хотим рассмотреть все траектории, которые выходят из него в каком угодно направлении, то необходимо убедиться, что это условие соблюдается (в соответствии с заданными значениями q_h^0) при любом выборе $\dot{q}_h^0$.

Это, несомненно, выполняется в динамическом случае даже и тогда, когда живая сила T не является однородной относительно $\dot{q}$, так как если обозначим, как обычно, через T_2 ее квадратичную часть, то будем иметь

$$\chi = \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_h \dot{q}_k = 2T_2,$$

а T_2 всегда представляет собой определенную (положительную) форму.

Таким образом, мы уточнили условия, очевидно, довольно широкие, при которых действие A можно рассматривать как функцию от $2n+1$ независимых аргументов q^0, q^1 и E. Если обратимся теперь к тождеству (54), то вариацию δ^*A, стоящую в левой части, можно будет использовать, аналогично вариации δ^*S предыдущего пункта, в качестве полного дифференциала действия A относительно $2n+1$ указанных выше аргументов; а так как равенство (54) удо-

влетворяется тождественно при каком угодно выборе бесконечно малых приращений этих $2n+1$ независимых между собой параметров, то из него выводятся следующие уравнения, в которых, как это уже делалось в предыдущем пункте, для удобства письма опущены индексы 1:

$$\frac{\partial A(q\,|\,q^0\,|\,E)}{\partial q_h} = p_h, \qquad (h = 1, 2, \ldots n) \tag{54'}$$

$$\frac{\partial A(q\,|\,q^0\,|\,E)}{\partial q_h^0} = -p_h^0, \tag{54''}$$

$$\frac{\partial A(q\,|\,q^0\,|\,E)}{\partial E} = t - t_0. \tag{54'''}$$

Эти уравнения, наравне с вариационным условием (54), из которого они выводятся, будут тождественно удовлетворены любым решением σ заданной лагранжевой системы (31) или эквивалентной ей гамильтоновой системы (31′), которая, как мы уже знаем, имеет интеграл $H(p\,|\,q) = E$.

Отсюда легко видеть, что действие $A(q\,|q^0\,|\,E)$ в рассматриваемом здесь случае, когда кинетический потенциал и, следовательно, функция Гамильтона не зависят от t (предыдущая глава, п. 38), приводит к интегрированию лагранжевой системы или, точнее, соответствующей гамильтоновой системы по методу Гамильтона — Якоби.

Действительно, если в функции $A(q\,|\,q^0\,|\,E)$ величины q будем рассматривать как независимые переменные, а q^0, E — как параметры, то равенства (54′) в силу самого их происхождения обеспечат нам то, что функция A будет удовлетворять уравнению

$$H\left(\frac{\partial A}{\partial q}\,|\,q\right) = E, \tag{56}$$

т. е. уравнению Гамильтона — Якоби, соответствующему нашей дифференциальной системе (31) или (31′).

Легко также видеть, что между $n+1$ постоянными параметрами q_0 и E всегда можно выбрать n таких, что по отношению к ним (и по отношению к n независимым переменным q) функция $A(q|q^0|E)$ будет представлять для уравнения Гамильтона — Якоби полный интеграл.

Согласно условию, которому должен удовлетворять полный интеграл (п. 38, гл. X), все сводится к доказательству того, что функциональный определитель от $p_h = \partial A/\partial q_h$ по n из параметров q^0 и E не будет тождественно равен нулю. Заметим теперь, что система (54″), (54‴) может рассматриваться как результат решения по отношению к p^0, $t - t_0$, $n+1$ уравнений, которые получатся путем присоединения уравнения $H = E$ к интегральным выражениям q через p^0, q^0, $t - t_0$. Отсюда следует, что, обратно, эта система (54″), (54‴) будет разрешима по отношению к $n+1$ аргументам q и E, а это обеспечивает, что соответствующий функциональный определитель $n+1$ порядка

левых частей уравнений (54″), (54‴) не будет тождественно равен нулю.

Поэтому матрица, образованная из первых n столбцов этого функционального определителя, т. е. матрица

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 A}{\partial q_1^0 \partial q_1} & \frac{\partial^2 A}{\partial q_1^0 \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 A}{\partial q_1^0 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial q_2^0 \partial q_1} & \frac{\partial^2 A}{\partial q_2^0 \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 A}{\partial q_2^0 \partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 A}{\partial q_n^0 \partial q_1} & \frac{\partial^2 A}{\partial q_n^0 \partial q_2} & & \frac{\partial^2 A}{\partial q_n^0 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial E \partial q_1} & \frac{\partial^2 A}{\partial E \partial q_2} & & \frac{\partial^2 A}{\partial E \partial q_n} \end{vmatrix}$$

будет иметь ранг n, и существование в этой матрице, по крайней мере, одного определителя n-го порядка, не равного тождественно нулю, обеспечивает то, что n из $n+1$ параметров q^0, E войдут существенным образом в выражение $A(q \mid q^0 \mid E)$, которое, таким образом, действительно дает полный интеграл для уравнения Гамильтона — Якоби.

Но в силу симметрии, которую представляет система (54′), (54″), (54‴) по отношению к q, q^0 (за исключением разве различных знаков двух первых групп уравнений), предыдущее рассуждение можно повторить, меняя в нем роль букв q, q^0; таким образом, мы видим, что действие $A(q \mid q^0 \mid E)$, когда в нем в качестве независимых переменных рассматриваются q^0, а в качестве произвольных постоянных n аргументов, надлежащим образом выбранных из $n+1$ аргументов q и E, дает полный интеграл уравнения

$$H\left(-\frac{\partial A}{\partial q^0} \mid q^0\right) = E. \tag{56′}$$

В том и другом случае уравнение (54‴), так же как уравнение (74б) п. 38 предыдущей главы, определяет закон движения.

В заключение этого исследования не бесполезно кратко изложить условия, которые мы должны были последовательно вводить для того, чтобы можно было выразить действие A через q, q^0 и E и чтобы были справедливы изложенные выше выводы. Этих условий три: 1) лагранжева система должна быть нормальной, т. е. гессиан кинетического потенциала $\mathfrak{L}$ не должен быть тождественно равен нулю; 2) функция Гамильтона $H(q \mid \dot{q})$, по предположению, не зависящая от t, должна явно содержать dt, т. е. не должна быть однородной нулевой степени относительно $\dot{q}$, для чего необходимо и достаточно,

чтобы $\mathfrak{L}$ не была суммой двух однородных относительно $\dot{q}$ функций, соответственно степени 0 и 1; 3) квадратичная форма

$$\chi = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_h \dot{q}_k$$

не должна быть равной нулю для начальных значений q^0, $\dot{q}^0$ величин q, $\dot{q}$; это условие должно быть выполнено при всевозможных значениях $\dot{q}^0$, если мы хотим рассматривать совокупность *всех* траекторий, выходящих из точки q^0.

Здесь уместно следующее замечание, аналогичное сделанному в конце предыдущего пункта. Уравнения (56′), (56″), которым удовлетворяет действие $A(q \mid q^0 \mid E)$, в зависимости от того, рассматриваются ли в качестве независимых переменных q или q^0, были найдены Гамильтоном, который показал также, какую пользу можно извлечь из действия A как для интегрирования соответствующей системы Гамильтона, так и для обнаружения ее важных свойств. Якоби принадлежит также и в этом частном случае кинетического потенциала, не зависящего от t, более легкий метод интегрирования гамильтоновой системы, полностью развитый в п. 39 предыдущей главы и основанный на знании какого-нибудь полного интеграла только одного уравнения (56′).

29. Случай изоэнергетической вариации. Соображения предыдущего пункта относятся к совокупности всех траекторий лагранжевой системы с кинетическим потенциалом, не зависящим от времени.

Выберем некоторое определенное значение постоянной E энергии, чем будет определена система ∞^{2n-2} траекторий или связка траекторий (п. 23), и подвергнем любое движение σ, соответствующее этой связке, какой-нибудь асинхронной изоэнергетической вариации, т. е. вариации, которая оставляет неизменным значение E энергии ($\delta^* E = 0$). Вытекающее отсюда условие $\delta^* H = 0$ при обычном предположении, что H действительно зависит от dt, не ограничивает никоим образом кривую c_v, бесконечно близкую к траектории c движения σ, поэтому из условия (54) мы получим в этом случае чисто геометрическое вариационное условие

$$\delta A = \left[\sum_{h=1}^{n} p_h \, \delta q_h \right]_{C_0}^{C_1} = 0 \tag{57}$$

в качестве характеристического для отдельных траекторий связки; это условие выделяет траектории среди всевозможных бесконечно близких кривых, которые могут и не иметь общих концов. Так как действие можно выразить в функции от $2n$ рядов независимых параметров

q и q^0, то из уравнения (57) выводятся две системы уравнений (54′), (54″) предыдущего пункта.

Но при этом предполагается, что все это имеет место при наличии трех условий, сформулированных в конце предыдущего пункта, а так как эти условия будут удовлетворены во всякой консервативной динамической задаче, то в этом случае соображения, указанные выше, будут непосредственно применимы.

Мы уже знаем (п. 15), что для траекторий консервативной динамической задачи действие допускает выражение

$$A = \int_c \sqrt{2(U+E)}\, ds;$$

в частности, для траекторий соответствующих спонтанных движений ($U=0$) или геодезических линий метрического многообразия с линейным элементом $ds^2 = 2T dt^2$ выражение для A принимает вид

$$A = \sqrt{2E}s,$$

где s обозначает длину дуги геодезической линии, заключенной между конечными конфигурациями.

Мы можем здесь добавить, что во всех этих случаях для действия можно указать выражение $A(q \mid q^0)$, зависящее исключительно от крайних конфигураций. Так, в частности, для длины дуги геодезической линии имеем выражение, которое составляет очевидное обобщение евклидовой формулы для расстояния между двумя точками обыкновенного пространства как длины соединяющего их отрезка.

Мы не будем останавливаться на доказательстве этого. В п. 30 мы укажем важное следствие из формулы (57). Здесь мы ограничимся указанием, что это вариационное условие или эквивалентные ему уравнения (54′), (54″) удобны для анализа вида динамической траектории, близкой к заданной, и приводят к установлению между траекториями, проходящими через две заданные точки, известной симметрии; из этой симметрии, в частности, вытекает важное соотношение взаимности, относящееся к пучкам лучей, испускаемых двумя световыми центрами в какую-нибудь оптическую среду [1]).

30. Теорема Бельтрами — Липшица. Выберем произвольно какую-нибудь траекторию C лагранжевой системы (31).

Условие

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h = 0, \tag{58}$$

[1]) См. T. Levi-Civita, Una proprietà di simmetria delle traiettorie dinamiche spiccate da due punti, *Rend. Acc. Lincei*, (5), т. XXVI, 1915_1, стр. 666—674.

в котором p_h обозначают обобщенные количества движения $\partial\mathfrak{L}/\partial\dot{q}_h$, относящиеся к c, можно истолковать в пространстве Γ_n координат q как соотношение, которое связывает в любой точке направление элементарного перемещения δP, определяемого приращениями δq, с обобщенными количествами движения p траектории c, или, если угодно, с соответствующими значениями $\dot{q}$, или, в конечном счете, с направлением самой траектории.

В динамическом случае спонтанного движения достаточно обратиться к соображениям п. 15 и ввести в пространство Γ_n обычное мероопределение $ds^2 = 2T\,dt^2$, чтобы точно видеть, что условие (58) выражает ортогональность перемещения δP к траектории или к геодезической линии соответствующего метрического многообразия V_n [1]. Если в более общем случае, оставаясь все же в пределах динамического случая, мы предположим, что действующие силы консервативны, но не равны нулю, и выберем некоторое значение для постоянной E энергии, то, как мы знаем, соответствующая связка траекторий будет тождественна с совокупностью геодезических линий метрического многообразия с линейным элементом

$$ds_1^2 = 2(U+E)\,ds^2 = 4(U+E)\,T\,dt^2,$$

так что соотношение (58) будет все еще определять ортогональность между перемещением δP и траекторией, но по отношению к этому последнему мероопределению, а не к мероопределению, соответствующему простой живой силе. Так, например, если речь идет о свободной точке (с массой, равной единице), находящейся под действием силы, являющейся производной от потенциала $U(x, y, z)$, то следует рассматривать уже не евклидову метрику физического пространства, определяемую обычным соотношением $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, а метрику некоторого воображаемого пространства, линейный элемент которого ds_1^2 отличается от элемента ds^2 на позиционный множитель.

Для удобства выражения мы условимся здесь вообще применять терминологию, точный геометрический смысл которой был выяснен в только что указанных случаях; и всякий раз как перемещение δP и траектория, выходящие из одной и той же точки P, будут удовлетворять уравнению (58), мы будем называть их *ортогональными*, даже если мы не захотим или не сможем ввести в абстрактное пространство Γ_n координат q метрику, которая вносит в этот способ выражения точное геометрическое содержание. В соответствии с этим соглашением мы скажем, что траектория, проходящая через некоторую точку P любой гиперповерхности или многообразия с $n-1$ измерениями из пространства Γ_n будет ортогональна к этой гиперповерхности, если она ортогональна ко всем перемещениям δP, которые переводят

[1]) См. например, T. Levi-Civita, Lezioni di Calcolo differenziale assoluto; Рим, 1925, гл. V, § 22.

точку P в другую бесконечно близкую точку той же самой гиперповерхности σ.

Заметив это, вспомним, что когда $\mathfrak{L}$ не зависит от t, траектории связки составляют многообразие ∞^{2n-2} измерений, и потому в пространстве Γ_n конфигураций одна и только одна из них проходит через заданную точку в заданном направлении. Отсюда следует, что если дана произвольная гиперповерхность σ_0, то через всякую ее точку, по крайней мере в некоторой области, проходит одна и только одна траектория рассматриваемой связки в направлении, ортогональном к σ_0. Можно представить себе, что для каждой из ∞^{n-1} траекторий определено действие A, начиная от точки P_0; в геодезическом случае, как уже не раз указывалось, действие A тождественно с длиной дуги, измеряемой от точки P_0. Если каждой точке P_0 сопоставим на соответствующей траектории ту точку P, в которой действие достигает некоторого произвольно заданного значения a, то геометрическим местом таких точек P будет новая гиперповерхность. Существует замечательное свойство, что *рассматриваемые траектории будут все ортогональными также и к этой гиперповерхности.*

Это является почти непосредственным следствием из формулы (57). Действительно, на гиперповерхности σ действие A в силу самого определения σ имеет постоянное значение a, так что для произвольного перемещения по поверхности имеем $\delta A = 0$. Так как в силу ортогональности каждой из рассматриваемых траекторий в ее начальной точке P_0 к исходной поверхности σ_0 справедливо соотношение

$$\sum_{h=1}^{n} p_h^0 \, \delta q_h^0 = 0,$$

то из формулы (57) получим, что на другом конце траектории имеет место аналогичное тождество

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \, \delta q_h = 0,$$

которое как раз и выражает утверждаемую ортогональность отдельных траекторий к гиперповерхности σ.

Эта теорема для случая геодезических линий принадлежит Бельтрами [1]), а обобщение ее на связки динамических траекторий принадлежит Липшицу [2]).

Мы получим известное и в то же время важное следствие, рассматривая совокупность траекторий связки, которые выходят из одной и той же точки P_0 в ∞^{n-1} возможных направлениях. Мы имеем здесь

---

[1]) Сочинения, т. II, стр. 89.

[2]) *Crelle*, т. 74 (1871), стр. 116—149. Рудольф Липшиц родился в Кёнигсберге в 1832 г., умер в Бонне в 1903 г.; был профессором Боннского университета. Он прежде всего был аналистом, но внес также важный вклад в механику и в теорию чисел.

дело с тем случаем, когда исходная поверхность σ_0, стягиваясь, сводится к точке P_0, и установленная выше теорема непосредственно дает, что эти ∞^{n-1} траекторий ортогонально пересекаются всякой поверхностью $A = \text{const}$.

В виде частного приложения мы можем представить себе световые лучи в оптически изотропной, но неоднородной среде с коэффициентом преломления $n(x, y, z)$, меняющимся от точки к точке. Как мы уже видели в п. 18, световые лучи тождественны с геодезическими линиями метрического многообразия, имеющего линейным элементом $ds_1 = n\,ds$, где ds есть обыкновенный линейный элемент физического (евклидова) пространства. Так как элемент ds_1 отличается только позиционным множителем n от евклидова элемента ds, то обобщенные количества движения p траекторий будут также отличаться только на локальный множитель от направляющих косинусов соответствующей касательной, так что введенное выше условие ортогональности (58) приобретает в этом случае обычный смысл, который оно имеет в элементарной метрике. С другой стороны, как было отмечено в п. 18, $n\,ds$ есть не что иное, как элемент времени dt, которое требуется свету, чтобы пройти элемент пути ds; следовательно, действие сводится к времени распространения света. Таким образом, мы на основании теоремы Бельтрами — Липшица заключаем, что *световые лучи, которые в заданный момент выходят из заданной поверхности σ_0 в направлении, ортогональном к σ_0, или, в частности, из единственного центра, остаются всегда ортогональными к поверхности $t = \text{const}$, каков бы ни был показатель преломления n, т. е. какова бы ни была неоднородность среды.* Эти поверхности, представляющие собой геометрические места точек, к которым свет приходит за один и тот же промежуток времени, образуют так называемые *волновые поверхности* (см. гл. X, упражнение 13).

Важный предельный случай предыдущего предложения мы будем иметь, рассматривая среду, в которой показатель изменяется внезапно при переходе через некоторую поверхность σ, оставаясь приблизительно постоянным (но с разными значениями) с одной и с другой стороны. Выполнив в обратном порядке рассуждения п. 18 и перейдя к пределу, мы будем иметь случай лучей с прямолинейным ходом с обеих сторон от поверхности σ, которые испытывают преломление при пересечении с этой поверхностью. Установленное выше предложение приводит к известной теореме *Малюса—Дюпена: если пучок световых лучей, выходящих из некоторого центра или, вообще, нормальных к заданной поверхности, подвергается какому угодно числу преломлений, то пучок лучей, выходящих из последней поверхности, будет попрежнему состоять из нормалей к некоторому семейству поверхностей.*

В дополнение к теореме Бельтрами — Липшица укажем еще на новые исследования, направленные на ее обращение, т. е. на определение таких траекторий консервативного пучка и, следовательно

таких геодезических линий подходящего метрического многообразия из ∞^{2n-2} кривых (пространства Γ_n координат q), которые обладают тем свойством, что ∞^{n-1} кривых системы, отрывающихся ортогонально от одной какой-нибудь гиперповерхности, остаются *нормалями* ∞^1 гиперповерхностей, т. е. ортогонально пересекаются ∞^1 гиперповерхностей[1]).

§ 7. Обобщение принципа Гамильтона, принадлежащее Гельмгольцу

31. Принцип Гамильтона, распространенный в п. 19 на нормальные лагранжевы системы, устанавливает эквивалентность между любой такой системой (31) и условием стационарности $\delta S = 0$ соответствующего интеграла

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\, dt \tag{16}$$

по отношению ко всем синхронным и только синхронным вариациям любого движения σ между одними и теми же крайними конфигурациями, к которому относится этот интеграл. Такая вариация определяется n бесконечно малыми функциями δq от t, произвольными в промежутке от t_0 до t_1, но исчезающими в моменты, соответствующие крайним положениям.

Далее, вспоминая, что $\delta\dot{q}$ суть не что иное, как производные по времени от δq (п. 6), и принимая во внимание уравнения, определяющие обобщенные количества движения

$$p_h = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} \qquad (h = 1, 2 \ldots, n),$$

мы увидим, что вариации δp не остаются произвольными, а будут однозначно определены как линейные однородные функции от δq, $\delta\dot{q}$; поэтому, если ввести характеристическую функцию Гамильтона

$$H = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\delta \dot{q}_h} \dot{q}_h - \mathfrak{L} = \sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h - \mathfrak{L}$$

и написать интеграл (16) в виде

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{h=1}^{n} \dot{p}_h \dot{q}_h - H \right) dt, \tag{16'}$$

---

[1]) См., в частности, E. Kasner, The theorem, и т. д., *Trans. of the Amer. Math. Society*, т. 11, 1910, стр. 121—140. J. Lipka, On Hamilton's canonical equations. *Bull. of the Massachusetts Institute of Technology*, сер. II, № 48, 1923, стр. 31—46. J. A. Schouten, Ueber die Umkehrung eines Satzes von Lipschitz, *Nieuw Archief voor Wiskunde* (Groningen, 1926).