таких геодезических линий подходящего метрического многообразия из ∞^{2n-2} кривых (пространства Γ_n координат q), которые обладают тем свойством, что ∞^{n-1} кривых системы, отрывающихся ортогонально от одной какой-нибудь гиперповерхности, остаются *нормалями* ∞^1 гиперповерхностей, т. е. ортогонально пересекаются ∞^1 гиперповерхностей[1]).

§ 7. Обобщение принципа Гамильтона, принадлежащее Гельмгольцу

31. Принцип Гамильтона, распространенный в п. 19 на нормальные лагранжевы системы, устанавливает эквивалентность между любой такой системой (31) и условием стационарности $\delta S = 0$ соответствующего интеграла

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\, dt \tag{16}$$

по отношению ко всем синхронным и только синхронным вариациям любого движения σ между одними и теми же крайними конфигурациями, к которому относится этот интеграл. Такая вариация определяется n бесконечно малыми функциями δq от t, произвольными в промежутке от t_0 до t_1, но исчезающими в моменты, соответствующие крайним положениям.

Далее, вспоминая, что $\delta\dot{q}$ суть не что иное, как производные по времени от δq (п. 6), и принимая во внимание уравнения, определяющие обобщенные количества движения

$$p_h = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} \qquad (h = 1, 2 \ldots, n),$$

мы увидим, что вариации δp не остаются произвольными, а будут однозначно определены как линейные однородные функции от δq, $\delta\dot{q}$; поэтому, если ввести характеристическую функцию Гамильтона

$$H = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\delta \dot{q}_h} \dot{q}_h - \mathfrak{L} = \sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h - \mathfrak{L}$$

и написать интеграл (16) в виде

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{h=1}^{n} \dot{p}_h \dot{q}_h - H \right) dt, \tag{16'}$$

---

[1]) См., в частности, E. Kasner, The theorem, и т. д., *Trans. of the Amer. Math. Society*, т. 11, 1910, стр. 121—140. J. Lipka, On Hamilton's canonical equations. *Bull. of the Massachusetts Institute of Technology*, сер. II, № 48, 1923, стр. 31—46. J. A. Schouten, Ueber die Umkehrung eines Satzes von Lipschitz, *Nieuw Archief voor Wiskunde* (Groningen, 1926).

то эквивалентность, утверждаемая принципом Гамильтона, будет иметь место, так как в синхронной вариации δS вариации δp рассматриваются уже не произвольными, а связанными с δq, $\delta \dot{q}$, как было сказано выше.

Гельмгольц заметил, что если интеграл S берется в виде (16′) и функция H рассматривается в нем выраженной через p, q и, возможно, через t и если в соответствующей синхронной вариации δS вариации δp рассматриваются как произвольные наравне с δq (при $\delta q_h = 0$ при $t = t_0$ и при $t = t_1$, но без какого бы то ни было ограничения для δp), то условие $\delta S = 0$ будет все еще эквивалентно лагранжевой системе (31) или, что одно и то же, в предположении $\Delta \neq 0$, гамильтоновой системе

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \quad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \quad (31')$$

Чтобы оправдать это утверждение, заметим прежде всего, что из $\delta S = 0$ следуют уравнения (31′), потому что δS обращается в нуль при всяком возможном выборе δp (и δq), что несомненно оправдывается, в частности, когда вариациям δp приписываются те значения в виде линейных функций от δq, $\delta \dot{q}$, которые выводятся из уравнений, определяющих обобщенные количества движения. Заметим, далее, что в то время как в обычном понимании вариация интеграла S геометрически истолковывается как происходящая от бесконечно малого произвольного изменения изображающей кривой в пространстве Γ_n конфигураций (между теми же крайними конфигурациями), обобщение Гельмгольца относится непосредственно к произвольной бесконечно малой вариации изображающей кривой в фазовом пространстве Φ_{2n} (между теми же крайними значениями для q, но не необходимо для p).

Доказательство справедливости обратного свойства, т. е. доказательство того, что из уравнений (31′) следует $\delta S = 0$, может быть найдено также непосредственно. Прежде всего, вводя в формулу (16′) символ синхронной вариации δ под знак интеграла, будем иметь

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{h=1}^{n} p_h \frac{d}{dt} \delta q_h + \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{h=1}^{n} \left(\dot{q}_h \delta p_h - \frac{\partial H}{\partial p_h} \delta p_h - \frac{\partial H}{\partial q_h} \delta q_h \right),$$

после чего, применяя к первому слагаемому интегрирование по частям и замечая, что члены с пределами интегрирования исчезают вместе с δq, получим

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{h=1}^{n} \left\{ -\left(\dot{p}_h + \frac{\partial H}{\partial q_h} \right) \delta q_h + \left(\dot{q}_h - \frac{\partial H}{\partial p_h} \right) \delta p_h \right\};$$

эта вариация тождественно обращается в нуль в силу гамильтоновой системы (31′).

Мы не прибавим ничего другого к этому указанию, ограничиваясь напоминанием, что важные следствия из этого обобщения принципа Гамильтона были даны Пуанкаре[1]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверить, что в случае материальной точки, удерживаемой на поверхности без трения, принцип прямейшего пути (п. 5) определяет траекторию как такую кривую, которая во всякой своей точке имеет наименьшую кривизну по сравнению со всеми другими кривыми, проведенными на поверхности и выходящими из этой точки в том же самом направлении (определяемом состоянием движения).

2. Пусть две динамические консервативные системы определяются одна живой силой T и потенциалом U, а другая живой силой λT и потенциалом U/λ^2, где λ обозначает какую-нибудь функцию от лагранжевых координат. Проверить, применяя выводы п. 17, что две соответствующие связи траекторий, для которых полная энергия равна нулю, совпадают.

Обозначив через V какую-нибудь функцию от q, достаточно положить

$$\lambda = \sqrt{\frac{U}{V}}, \qquad T = \frac{\mathfrak{T}}{\sqrt{V}},$$

чтобы придать предыдущему результату следующую более симметричную форму: две связки траекторий, принадлежащие двум консервативным динамическим системам,

$$(\sqrt{V}\mathfrak{T},\ U), \quad (\sqrt{U}\mathfrak{T},\ V),$$

совпадают.

3. Изометрические преобразования. Известно, что квадрат линейного элемента любой поверхности посредством надлежащего выбора криволинейных координат x, y может быть всегда представлен в виде $ds^2 = \lambda(dx^2 + dy^2)$, где λ есть функция от x, y.

Поэтому геодезические линии поверхности будут тождественны (п. 17) с пучком траекторий плоского движения материальной точки (единичной массы), находящейся под действием консервативных сил, производных от потенциала $\lambda/2$, если полная энергия точки равна нулю.

Изометрическим называется всякое преобразование криволинейных координат поверхности, которое можно представить в виде

$$\xi + i\eta = w(x + iy), \tag{1}$$

где w обозначает моногенную функцию комплексного переменного $x + iy$. Это название оправдывается тем, что (как это можно проверить непосредственно, дифференцируя уравнение (1) и приравнивая квадраты модулей в обеих частях)

$$d\xi^2 + d\eta^2 = |w'|^2 (dx^2 + dy^2).$$

Вывести отсюда, что если известно решение плоской динамической задачи, соответствующей заданному потенциалу $U(x, y)$, то можно прямо указать пучок траекторий для аналогичной задачи, соответствующей потенциалу

$$V(\xi, \eta) = \frac{U(x, y) + C}{|w'|^2},$$

---

[1]) H. Poincaré, Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, т. III, гл. XXIX.