Мы не прибавим ничего другого к этому указанию, ограничиваясь напоминанием, что важные следствия из этого обобщения принципа Гамильтона были даны Пуанкаре[1]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверить, что в случае материальной точки, удерживаемой на поверхности без трения, принцип прямейшего пути (п. 5) определяет траекторию как такую кривую, которая во всякой своей точке имеет наименьшую кривизну по сравнению со всеми другими кривыми, проведенными на поверхности и выходящими из этой точки в том же самом направлении (определяемом состоянием движения).

2. Пусть две динамические консервативные системы определяются одна живой силой T и потенциалом U, а другая живой силой λT и потенциалом U/λ^2, где λ обозначает какую-нибудь функцию от лагранжевых координат. Проверить, применяя выводы п. 17, что две соответствующие связи траекторий, для которых полная энергия равна нулю, совпадают.

Обозначив через V какую-нибудь функцию от q, достаточно положить

$$\lambda = \sqrt{\frac{U}{V}}, \qquad T = \frac{\mathfrak{T}}{\sqrt{V}},$$

чтобы придать предыдущему результату следующую более симметричную форму: две связки траекторий, принадлежащие двум консервативным динамическим системам,

$$(\sqrt{V}\mathfrak{T},\ U), \quad (\sqrt{U}\mathfrak{T},\ V),$$

совпадают.

3. Изометрические преобразования. Известно, что квадрат линейного элемента любой поверхности посредством надлежащего выбора криволинейных координат x, y может быть всегда представлен в виде $ds^2 = \lambda(dx^2 + dy^2)$, где λ есть функция от x, y.

Поэтому геодезические линии поверхности будут тождественны (п. 17) с пучком траекторий плоского движения материальной точки (единичной массы), находящейся под действием консервативных сил, производных от потенциала $\lambda/2$, если полная энергия точки равна нулю.

Изометрическим называется всякое преобразование криволинейных координат поверхности, которое можно представить в виде

$$\xi + i\eta = w(x + iy), \tag{1}$$

где w обозначает моногенную функцию комплексного переменного $x + iy$. Это название оправдывается тем, что (как это можно проверить непосредственно, дифференцируя уравнение (1) и приравнивая квадраты модулей в обеих частях)

$$d\xi^2 + d\eta^2 = |w'|^2 (dx^2 + dy^2).$$

Вывести отсюда, что если известно решение плоской динамической задачи, соответствующей заданному потенциалу $U(x, y)$, то можно прямо указать пучок траекторий для аналогичной задачи, соответствующей потенциалу

$$V(\xi, \eta) = \frac{U(x, y) + C}{|w'|^2},$$

---

[1]) H. Poincaré, Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, т. III, гл. XXIX.

где C есть произвольная постоянная при условии, что полная энергия точки равна нулю[1]).

4. Брахистохрона. Если в силовом поле, производном от единичного потенциала $U(x, y, z)$, точка (с массой, равной единице) удерживается без трения на кривой и описывает на ней всегда в одном направлении дугу c, заключенную между двумя точками, и если через s мы обозначим криволинейную абсциссу на кривой c (отсчитываемую в направлении движения), то продолжительность t движения определится соотношением

$$t = \int_c \frac{ds}{v};$$

здесь в силу теоремы живых сил (гл. I, п. 12)

$$v^2 = v_0^2 + 2(U - U_A), \tag{2}$$

где v_0 и U_A — начальные значения абсолютной величины скорости и потенциала.

Задача о брахистохроне (для заданного силового поля) формулируется так: оставляя неизменными два конца A и B, определить дугу кривой c так, чтобы продолжительность t пробега была наименьшей. Эта задача впервые была поставлена и решена в 1696 г. Иваном Бернулли для случая силы тяжести ($U = gy$, если ось y вертикальна и направлена вниз) и послужила исходным пунктом вариационного исчисления.

С аналитической точки зрения эта задача, очевидно, тождественна с задачей об определении, по принципу Ферма, хода световых лучей в оптической среде с заданным показателем преломления $1/v$ (п. 18); как мы уже имели случай указать (только что упомянутый пункт), кривая c, разрешающая задачу, принадлежит к связке траекторий, удовлетворяющей условию $E = 0$ и соответствующей свободному движению в силовом поле с единичным потенциалом

$$\frac{1}{2v^2},$$

где v определяется равенством (2).

Для этого свободного движения абсолютная величина скорости V на основании интеграла живых сил определяется равенством

$$V^2 = \frac{1}{v^2};$$

обозначая через r радиус кривизны дуги c и приравнивая проекции ускорения и активной силы на главную нормаль n (направленную к центру), будем иметь

$$\frac{V^2}{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dn}\frac{1}{v^2} = -\frac{1}{2v^4}\frac{dv^2}{dn},$$

отсюда, исключая V и имея в виду (2), придем к равенству

$$\frac{v^2}{r} = -\frac{dU}{dn}. \tag{3}$$

---

[1]) Goursat (с последующим замечанием Дарбу). *Comptes rendus*, т. 108, 1889, стр. 446—450.

С другой стороны, при движении со связями, реакция кривой, направленная по главной нормали, определяется соотношением (гл. I, п. 5)

$$R_n = \frac{v^2}{r} - F_n = \frac{v^2}{r} - \frac{dU}{dn}.$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (3), заключаем (теорема Эйлера), что *при движении по брахистохроне в каком-нибудь силовом поле реакция кривой в любой момент прямо противоположна удвоенной составляющей активной силы по главной нормали.*

5. Брахистохрона в поле силы тяжести. Как уже было отмечено, этот случай входит в задачу предыдущего упражнения при условии $U = gy$, если ось y вертикальна и направлена вниз. Если для краткости обозначим через $-y_0$ постоянную $U_0^2 - 2U_A$, то интеграл, который мы хотим сделать минимальным, в этом случае принимает вид

$$t = \int_c \frac{ds}{\sqrt{2g(y-y_0)}}.$$

Прямой вывод вида кривой c из условия стационарности этого интеграла излагается и иллюстрируется во многих курсах механики и вариационного исчисления[1]). Здесь же мы составим себе представление о ней на основании теоремы об эквивалентности п. 18, в), рассматривая эту кривую как принадлежащую к связке траекторий с нулевой полной энергией при движении свободной точки, находящейся в силовом поле с единичным потенциалом

$$\frac{1}{4g(y-y_0)}.$$

Обратимся к общему случаю, когда две точки A, B не лежат на одной и той же вертикали и определяют вертикальную плоскость. Рассматриваемое движение происходит в этой плоскости, лишь бы, конечно, в ней лежала начальная скорость; если эту плоскость движения мы примем за плоскость координат $z = 0$ (сохраняя постоянно ось y вертикальной и направленной вниз), то дифференциальные уравнения движения будут иметь вид

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -\frac{1}{4g(y-y_0)^2}.$$

Так как отсюда следует $\dot{x} = \text{const} = \dot{x}_0$, а, с другой стороны, интеграл живых сил, в котором, согласно условию нашей задачи, надо положить $E = 0$, дает

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{1}{2(y-y_0)} = 0,$$

то достаточно исключить dt посредством соотношения $dx = \dot{x}_0\,dt$ (что можно сделать, так как $\dot{x}_0$ в силу предположения, что A и B не принадлежат одной вертикали, будет, конечно, отлично от нуля) и положить для краткости

$$a = \frac{1}{4g\dot{x}_0^2},$$

---

[1]) Суслов Г. К., Теоретическая механика, 1946; Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 1950.

чтобы получить уравнение

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{2a}{y-y_0}, \tag{4}$$

которое дает дифференциальное уравнение искомой брахистохроны.

Это уравнение удобнее интегрировать в параметрической форме; для этого, так как правая часть будет, конечно, больше или равна единице, положим

$$y-y_0=2a\cos^2\frac{\theta}{2}=a(1+\cos\theta). \tag{5}$$

Этим угол θ, предполагаемый заключенным между $-\pi$ и π, будет определен, по крайней мере, с точностью до знака, который мы выберем немного позже. Из равенств (4), (5) следует

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2},$$

поэтому, извлекая квадратный корень и пользуясь произвольностью выбора знака θ, можем положить

$$\frac{dy}{dx}=-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

После этого, дифференцируя уравнение (5) и исключая посредством только что найденного уравнения dy, получим

$$dx=2a\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=a(1+\cos\theta)\,d\theta;$$

отсюда, обозначая через x_0 постоянную интеграции, заключаем, что

$$x-x_0=a(\theta+\sin\theta). \tag{6}$$

Уравнения (5), (6) дают искомое представление брахистохроны; достаточно перенести начало в точку с координатами x_0, y_0 (полагая $\xi=x-x_0$, $\eta=y-y_0$), чтобы видеть, что мы имеем здесь циклоиду, отнесенную к своему основанию, как оси x, и с вогнутостью вверх (т. I, гл. V, п. 43).

Предоставляем читателю определение постоянных на основе данных вопроса (координат точек A и B), равно как и проверку того, что если A и B находятся на одной и той же вертикали, то брахистохрона сводится к соединяющему их отрезку.

6. В п. 20 мы видели, что даже в случае, когда $\mathfrak{L}(q|\dot{q})$ является однородной функцией первой степени относительно $\dot{q}$, условие стационарности интеграла

$$S=\int_c \mathfrak{L}(g\,|\,dq)$$

определяет, *каков бы ни был параметр* t, уравнения Лагранжа

$$\mathfrak{L}_h\equiv\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_h}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_h}=0 \qquad (h=1,\,2,\ldots,h);$$

как мы уже знаем, эти уравнения не будут независимыми между собой, так что задача будет определена только тогда, когда прибавляется еще одно уравнение (например, (35) в п. 20), которое как раз и служит для определения параметра t.

Примем, в частности, за $\mathfrak{L}(q \mid dq)$ функцию

$$f(x, y, z)\, ds \equiv f(x, y, z) \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

где f есть какая-нибудь функция от x, y, z; тогда первое из уравнений Лагранжа будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \frac{f\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - \frac{\partial f}{\partial x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 0;$$

а два другие будут аналогичны ему; если за параметр t возьмем дугу s, в силу чего радикал сведется к единице, то три лагранжевых уравнения можно будет соединить в одно векторное уравнение:

$$\frac{d(f\boldsymbol{t})}{ds} + \boldsymbol{F} = 0, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{t}$ обозначает единичный вектор касательной к неизвестной кривой, для которой интеграл S принимает стационарное значение, а $\boldsymbol{F}$ — силу, производную от потенциала $-f$.

Заметив это, сравним уравнение (7) с уравнением равновесия нити (т. I, гл. XIV, п. 19)

$$\frac{d(T\boldsymbol{t})}{ds} + \boldsymbol{F} = 0$$

и вспомним, что между натяжением T и потенциалом U существует соотношение $T + U = \text{const}$ (там же, п. 37) или прямо $T + U = 0$, лишь бы была выбрана надлежащим образом аддитивная произвольная постоянная потенциала.

Таким образом, мы видим, что кривые, для которых интеграл S принимает стационарное значение, допускают, помимо различных уже указанных истолкований (геодезические траектории связки, световые лучи, брахистохроны), еще и следующее: они могут рассматриваться как конфигурации равновесия гибкой и нерастяжимой нити в поле силы с единичным потенциалом

$$U = -f(x, y, z).$$

7. Из теорем об эквивалентности § 4 следует, что если известно движение консервативной динамической системы с живой силой T и потенциалом U, то мы сможем указать и спонтанное движение, соответствующее живой силе $(U + E)\,T$ при $E = \text{const}$. Отсюда еще не следует, что если функции T и U имеют форму Штеккеля (гл. X, п. 64), то то же справедливо и для функции $(U + E)\,T$. Проверить, что это действительно имеет место, установив, что $(U + E)\,T$ входит в тип живой силы Штеккеля, если вместо φ_{nh} подставлены выражения

$$E\varphi_{nh} + U_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

а $\varphi_{\nu h}$ для $\nu < n$ сохраняют первоначальные значения.

8. Замкнутые траектории. Теорема Уиттекера. Как мы уже знаем (п. 15), траектории консервативной динамической системы, принадлежащие к определенной связке, дают интегралу

$$\mathrm{A} = \int_c \sqrt{2(U + E)}\, ds$$

стационарное значение при соответствующем значении энергии E.

Из этого свойства Уиттекер[1]) получил очень важный критерий существования замкнутых траекторий.

Обратимся для определенности к плоскому движению и предположим, что S есть двухсвязная область плоскости движения (т. е. такая область, которая путем непрерывной деформации может быть превращена в круговое кольцо), ограниченная с внутренней стороны замкнутой кривой c_1, а с внешней замкнутой кривой c_2, причем c_1 и c_2 представляют собою кривые без двойных точек и с непрерывно вращающейся касательной.

Будем называть *кривой* C всякую замкнутую кривую из S (тоже без двойных точек и с непрерывно вращающейся касательной), которая путем непрерывной деформации внутри S может быть превращена в c_1 (и, следовательно, также и в c_2).

Предположим теперь, что во всей области S потенциал U остается правильным и действие А, вычисленное вдоль каждой из кривых c_i $(i = 1, 2)$, уменьшается, когда вместо рассматриваемой кривой c_i подставляется какая-нибудь кривая c, достаточно близкая к c_i (возможно, и совпадающая в некоторой части с c_i, что, конечно, должно быть оговорено) и внутренняя для S. Это второе условие, как показал Уиттекер, будет, наверное, удовлетворено, если для каждой кривой C_i имеет место неравенство

$$\frac{U+E}{R} - \frac{1}{2}\frac{dU}{dn} > 0,$$

где n обозначает в обоих случаях нормаль к кривой c_i, направленную наружу от S, а R есть радиус кривизны кривой c_i, считаемый положительным или отрицательным, смотря по тому, будет ли центр кривизны лежать на положительной полупрямой нормали n или на противоположной ей полупрямой. Как мы знаем, такое неравенство можно непосредственно проверить по данным задачи.

Далее, Уиттекер отметил, что при предыдущих предположениях среди кривых c из области S наверное имеется траектория рассматриваемой динамической задачи.

Рассуждения Уиттекера, сделанные вполне строгими Синьорини[2]) и отличным от него путем Тоннелли[3]), просты и ясны и, по существу, сводятся к следующим замечаниям.

Интеграл А, существенмо положительный, можно рассматривать как функцию от различных кривых c из области S; среди этого множества кривых, по крайней мере, одна, которую обозначим через $\bar{c}$, дает действию А наименьшее значение[4]).

Эта кривая $\bar{c}$ не может (даже частично) совпадать с c_1 или с c_2. Действительно, если бы некоторая дуга кривой $\bar{c}$ составляла часть одной из кривых c_i, то достаточно было бы сместить эту дугу немного внутрь S, для того чтобы уменьшить, согласно допущенным предположениям, соответствующее значение А; а это противоречит тому, что действие А имеет

---

[1]) См. Е. Т. Уиттекер, Аналитическая динамика, перевод Малкина с 3-го английского изд., ОНТИ, 1937, § 168, стр. 424—427.

[2]) *Rend. Circ. mat. di Palermo*, т. XXXIII, 1912, стр. 187—193.

[3]) *Rend. Lincei*, сер. 5а, т. XXI, 1912, стр. 251—258, 332—334.

[4]) Это место доказательства требует дальнейшего критического анализа, аналогичного тому классическому, который был установлен по поводу *принципа Дирихле*. В то время как существование нижнего предела для значений интеграла А в совокупности кривых c несомненно, заранее неизвестно, что этот нижний предел действительно может быть достигнут для некоторой кривой $\bar{c}$ совокупности.

минимум для дуги $\bar{c}$. К этому можно добавить, что дуга $\bar{c}$ не может иметь с дугами c_1 или c_2 даже изолированных общих точек, так что она будет целиком внутренней для S.

Отсюда следует, что также и всякая кривая c, близкая к $\bar{c}$, является внутренней для S, и свойство минимума A вдоль кривой $\bar{c}$ обеспечивает нам, что $\delta A = 0$, когда делается переход от $\bar{c}$ к какой-нибудь бесконечно близкой кривой c. Но замкнутую кривую $\bar{c}$ можно рассматривать как дугу, имеющую концы, совпадающие в произвольной ее точке A. Достаточно теперь обратиться к кривой c, бесконечно близкой к $\bar{c}$ и проходящей тоже через A, чтобы можно было заключить на основании п. 15, что кривая $\bar{c}$ есть траектория динамической задачи.

9. Доказать, что если $\mathfrak{L}$ есть функция не только от $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$ и от $\dot{q}$, но также и от вторых производных $\ddot{q}$, то условие для того, чтобы интеграл

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\, dt$$

был стационарным по отношению ко всем синхронно-варьированным движениям между теми же конечными конфигурациями п. 6, будет выражаться дифференциальной системой

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \ddot{q}_h} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

и проверить, что если функция $\mathfrak{L}$ явно не зависит от t, то эта система допускает интеграл

$$H \equiv \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \ddot{q}_h}\ddot{q}_h + \sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \ddot{q}_h}\right)\dot{q}_h - \mathfrak{L} = \text{const}.$$

10. В соответствии с рассуждениями п. 20 доказать, что для какой-нибудь лагранжевой системы с кинетическим потенциалом $\mathfrak{L}$, не зависящим от времени, функция Гамильтона

$$H = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h - \mathfrak{L}$$

будет постоянной (в силу чего обобщенный интеграл энергии становится иллюзорным) только тогда, когда $\mathfrak{L}$, по крайней мере с точностью до несущественной аддитивной постоянной, сводится к однородной функции первой степени относительно $\dot{q}$.

11. Гельмгольц показал, как путем введения подходящих игнорируемых координат можно построить механическую модель термических явлений, и, в частности, он получил из варьированного действия конкретное выражение для энтропии, а также некоторые свойства взаимности, которые находят

многочисленные экспериментальные подтверждения. В отношении этих термодинамических приложений мы отсылаем читателя к Больцману[1]).

12. Обобщение принципа Гамильтона, изложенное в п. 31, приводит к каноническим уравнениям. Гельмгольц указал также новую форму обобщения того принципа Гамильтона, которая, наоборот, приводит к уравнениям Лагранжа. Пусть $\mathfrak{L}$ есть какая-нибудь функция от $2n+1$ аргументов $q_1, q_2, \ldots, q_n, z_1, z_2, \ldots, z_n, t$ и пусть

$$\Lambda = \mathfrak{L} + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z_h} (\dot{q}_h - z_h).$$

Условие стационарности интеграла

$$\mathfrak{F} = \int_{t_0}^{t_1} \Lambda \, dt$$

относительно приращений δq, δz, произвольных в промежуточные моменты и равных нулю в крайние моменты t_0, t_1, выражается дифференциальными уравнениями

$$z_h = \dot{q}_h, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z_h}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

которые по исключении z, очевидно, сводятся к уравнениям Лагранжа.

---

[1]) Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik, Leipzig, 1904; ч. II, стр. 162—209.

Людвиг Больцман родился в Вене в 1844 г., умер в Дуино (Триест) в 1906 г. С 1876 до 1889 г. был профессором опытной физики в Грацском университете, а после этого профессором теоретической физики в университетах Монако, Лейпцига и Вены. Внес важный вклад как экспериментатор, но удивительных результатов достиг в теоретической области благодаря своим исследованиям по кинетической теории газов и по термодинамике. Он был убежденным атомистом в ту эпоху, когда из-за отсутствия реальной экспериментальной базы для доказательства физической действительности молекул огромное большинство физиков рассматривало атомизм как чисто абстрактное учение, заменимое во всех его конкретных следствиях феноменологическими взглядами. Имея логический ум и живой темперамент оратора и полемиста, он оставил наряду с систематическими трактатами по теории газа, по аналитической механике и по теории электромагнитных явлений (Максвелла) один том публицистических сочинений (2-е изд., Лейпциг, 1919). Его научные мемуары немного спустя после его смерти были собраны в трех томах (Лейпциг, 1909).