Глава XII

ТЕОРИЯ УДАРА

§ 1. Основные уравнения. Удар в элементарном случае

1. Общие соображения. В предыдущих главах мы изучали движение материальных систем за такие промежутки времени, в течение которых явление представляется непрерывным. Точнее, мы всегда предполагали, что координаты отдельных точек системы во время движения суть непрерывные функции времени вместе с их первыми, а, возможно, и вторыми и т. д. производными. Но может случиться, что точки материальной системы, начиная с определенного момента, в течение очень короткого промежутка времени резко изменяют скорости без того, чтобы за то же время система заметно изменила свое положение.

Мы уже видели (т. I, гл. VIII, § 4), что в случае свободной точки P это произойдет всякий раз, как в точке P будет приложен удар, т. е. некоторая сила F, которая, действуя на точку P в течение очень короткого промежутка времени τ, следующего за данным моментом t_0, достигает за этот промежуток *очень большой* интенсивности. Уже тогда мы уточнили природу этих ударов, принимая в качестве основного условия требование, чтобы был определенным и конечным мгновенный *импульс*

$$I = \lim_{\tau \to 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F\,dt, \tag{1}$$

представляющий собой в силу самого определения динамический элемент, который должен быть введен в постановку задачи механики, когда имеют место удары.

Из основного уравнения механики $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ посредством интегрирования по времени от t_0 до $t_0 + \tau$ и перехода к пределу при τ, стремящемся к нулю, мы видели, что удар: а) действительно определяет для скорости $\boldsymbol{V}$ точки P резкое изменение, связанное с импульсом (1) соотношением, основным для этой теории:

$$m\,\Delta\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}; \tag{2}$$

б) оставляет неизменным положение точки.

В случае свободной точки это и будут характерные обстоятельства так называемого *импульсивного движения* (движения под действием мгновенных сил). С точки зрения кинематической в этом дви-

жении нужно рассматривать, помимо момента t_0 и положения точки, две различные скорости, которые появляются как предельные значения скорости точки P в моменты, непосредственно предшествующий и непосредственно следующий за t_0. Мы назовем их соответственно *скоростью до удара* и *скоростью после удара* и обозначим через v^- и v^+, так что следует положить

$$\Delta v = v^+ - v^-.$$

Возвращаясь к равенству (2), добавим здесь, что оно остается в силе, если даже к точке одновременно с ударом приложены другие обычные силы, т. е. силы, которые сохраняют конечную величину при стремлении τ к нулю. Это прямо следует из того, что для всякой такой силы мгновенный импульс (1) будет равен нулю. Поэтому можно сказать, что на внезапное изменение скорости, происходящее от удара, не влияет совместное действие какого угодно числа обыкновенных сил.

После этих предварительных замечаний, относящихся к свободной точке, перейдем к случаю какой угодно материальной системы. Возьмем в качестве образца физические явления, которые можно наблюдать, когда биллиардный шар получает удар кием, когда забивают в стену гвоздь ударами молотка, или когда два твердых тела сталкиваются между собой, и обратимся к материальной системе S из N точек $P_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ с какими угодно связями. Если система S находится под действием каких угодно сил и, начиная с определенного момента t_0, в течение очень короткого промежутка времени τ на нее будут действовать еще и удары, то непосредственно уже не будут приложимы выводы, которые в случае свободной точки позволили нам заключить, что происходит только резкое изменение скорости, а положение точки остается неизменным.

Здесь в силу действия связей (будем иметь в виду, например, твердое тело) активные удары вызывают в системе S другие удары реактивной природы, поведение которых заранее неизвестно. Если мы хотим рассуждать строго, то должны принять, что полный эффект прямо приложенных ударов и ударов, происходящих от реакций связей, будет тот же самый, который имеет место в случае ударов, приложенных к свободной точке, т. е. что прямо приложенные удары и удары реакций связей вызывают для отдельных точек P_i резкие изменения скоростей, но не изменяют заметно их положений.

Вольтерра показал, как это логическое требование можно удовлетворить для одного очень общего класса систем со связями, а именно для тех систем, для которых имеет силу теорема живых сил. Мы рассмотрим соображения Вольтерра в § 6, а пока согласно с установившимся изложением этой теории допустим, в качестве характеристического постулата для импульсивного движения систем, что *точки материальной системы с какими угодно связями*,

находящейся под действием прямо приложенных импульсов, могут испытывать резкие изменения скоростей, но сохраняют приблизительно неизменным свое положение.

Поэтому соответственно каждому моменту, в который происходит удар, надо различать для системы *состояние движения до и после удара.* Задача исследования движения под действием мгновенных сил будет поэтому состоять в том, чтобы определить состояние движения после удара, если известно положение системы и кинематическое состояние ее до удара, а также, конечно, связи и те физические обстоятельства, которые определяют явление удара и которые, вообще говоря, можно представить в виде прямо приложенных ударов или, точнее, в виде соответствующих мгновенных импульсов.

Во всяком случае к каждой точке системы будет приложимо основное уравнение (2) с тем условием, что $\boldsymbol{I}$ обозначает в нем результирующую всех мгновенных импульсов, активных и реактивных, действующих на точку.

2. Следствия из принципа реакций. Отнесем данную материальную систему S к галилеевым осям $\Omega\xi\eta\zeta$ и рассмотрим очень короткий промежуток времени τ, в течение которого на систему среди прочих приложенных сил действуют силы, имеющие характер ударов в смысле, разъясненном в предыдущем пункте; каждая такая сила на основании уравнения (1) дает импульс $\boldsymbol{I}$, не равный нулю. Вводя в виде вспомогательных неизвестных возможные реактивные удары, возникающие в отдельных точках вследствие наличия связей, мы будем отличать между силами как обыкновенными, так и ударными, действующими на любую точку P_i, силы внешнего происхождения от сил внутренних и будем обозначать через F_i результирующую первых сил. Совокупность всех внутренних сил, действующих на систему в силу равенства действия и противодействия, составляет векторно уравновешенную систему (т. е. систему с равными нулю результирующей и результирующим моментом); поэтому для любого момента будут оставаться в силе основные уравнения движения (гл. V, § 2):

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}, \tag{3}$$

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M}, \tag{4}$$

где, как обычно, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$ обозначают результирующую и результирующий момент количеств движения системы S относительно неподвижной точки или центра тяжести и

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{N} F_i, \quad \boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times F_i \tag{5}$$

суть результирующая и результирующий момент всех внешних сил (активных и реакций), среди которых, конечно, для нас имеют осо-

бенно важное значение силы импульсивного характера. Для определения с этой точки зрения этих внешних сил введем соответствующие импульсы

$$I_i = \lim_{\tau \to 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F_i \, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{6}$$

напомнив еще раз, что в образовании этих импульсов принимают участие составляющие каждой из сил F_i, имеющих характер удара, но не силы обычного типа (конечные).

Важно заметить теперь же, что в некоторых случаях, среди которых особенно замечателен случай свободного твердого тела, находящегося под действием указанных активных мгновенных импульсов, удары, которые могут возникнуть благодаря связям, будут исключительно внутренними: в этих случаях импульсы I_i, как происходящие исключительно от прямо приложенных ударов, можно считать вполне известными.

3. Первое основное уравнение движения под действием мгновенных сил. Интегрируя уравнение (3) по времени t от t_0 до $t_0+\tau$, где τ есть очень короткий промежуток времени, в течение которого действуют мгновенные силы, и переходя к пределу при τ, стремящемся к нулю, получим уравнение

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \mathbf{R}, \tag{7}$$

где при очевидных обозначениях положено

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^+ - \boldsymbol{Q}^-,$$

$$\mathbf{R} = \lim_{\tau \to 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{R} \, dt,$$

или, на основании первого из равенств (5) и равенства (6),

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{I}_i;$$

$\mathbf{R}$ есть, таким образом, *результирующая внешних импульсов*. Уравнение (7) представляет собой *первое основное уравнение движения под действием мгновенных сил*.

Из этого уравнения, в частности, следует, что если, как это имеет место в случае системы из двух или большего числа сталкивающихся тел, система испытывает только импульсы внутреннего происхождения, так что $\mathbf{R}$ будет равно нулю, то имеем $\Delta \boldsymbol{Q} = 0$. Таким образом, мы видим, что в явлениях столкновения и в подобных им мы имеем *сохранение результирующего количества*

движения, причем, вообще говоря, количества движения отдельных точек системы могут резко измениться.

Если далее вспомним, что вектор Q совпадает с количеством движения центра тяжести (гл. IV, п. 12), то придем к заключению, что импульсивные действия внутренней природы не изменяют скорости центра тяжести (ср. гл. V, п. 7).

4. Прямой центральный удар двух тел. Для того чтобы тотчас же применить предыдущие результаты к элементарному случаю, рассмотрим удар, происходящий между двумя телами S_1, S_2, находящимися в поступательном движении по одному и тому же направлению Ox, когда оба тела движутся навстречу друг другу и сталкиваются, или когда одно из них, двигаясь в ту же сторону, что и другое, но с большей скоростью, догоняет его; предположим, что даже и после столкновения движение обоих тел сохраняет свой поступательный характер вдоль того же направления, за исключением возможных резких изменений величины и направления скорости. При этих условиях удар называется *центральным и прямым*. Общий случай будет изучен в § 3; тогда мы уточним смысл этих двух названий, данных этому важному частному случаю, которым мы сейчас будем заниматься. Заметим, что допущенные здесь предпололожения будут приблизительно осуществлены, если взять, например, два шарика на счетах, скользящие по одной и той же проволоке.

Если через m_1, m_2 обозначим массы двух тел, через v_1, v_2 — их скорости вдоль оси Ox и через $\Delta v_1 = v_1^+ - v_1^-$, $\Delta v_2 = v_2^+ - v_2^-$ — соответствующие резкие изменения в момент толчка, то основное уравнение (7) в этом случае примет вид

$$m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2 = 0; \tag{8}$$

оно выразит, как это уже было замечено в общем случае в предыдущем пункте, неизменность скорости

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m} \qquad (m = m_1 + m_2) \tag{9}$$

центра тяжести при ударе.

Согласно постановке задачи о движении под действием мгновенных сил, сделанной в п. 1, скорости обоих тел v_1^-, v_2^- до удара должны рассматриваться известными, а требуется определить скорости v_1^+, v_2^+ после удара. Но для определения этих двух неизвестных одного соотношения (8), даваемого первым основным уравнением, не достаточно; поэтому необходимо будет ввести новое условие, которое может быть получено только из опыта. Для этой цели был бы необходим подробный анализ сложных явлений, которые происходят в течение очень короткого промежутка времени τ, когда два тела, пришедшие в соприкосновение, сначала, взаимно сжимая друг друга,

деформируются, а затем, после полного или частичного исчезновения деформации, отскакивают друг от друга (*упругие тела*), или, в виде исключения, остаются соединенными (тела абсолютно неупругие, как воск, свинец и т. п.), продолжая двигаться с одной и той же скоростью. В этом последнем случае задача непосредственно разрешима, так как к уравнению (8) можно присоединить уравнение

$$v_2^+ = v_1^+.$$

Общая величина этих скоростей после удара будет равна скорости v центра тяжести, которая (см. предыдущий пункт) не изменяется при столкновении, и может быть поэтому выражена посредством скоростей от удара. Мы приходим, таким образом, к окончательной формуле

$$v_1^+ = v_2^+ = \frac{m_1 v_1^- + m_2 v_2^-}{m}.$$

В общем случае двух упругих тел, не входя в подробный анализ, упоминавшийся выше, можно упростить сложный характер явления. Введем вслед за Ньютоном кинематическое предположение, что относительная скорость удаления одного из двух тел по отношению к другому тотчас же после столкновения является некоторой определенной дробью e от аналогичной скорости сближения непосредственно до столкновения. Это приводит к тому, что мы присоединяем к уравнению (8) в качестве эмпирического закона, в какую бы сторону ни была направлена ось Ox, уравнение

$$v_2^+ - v_1^+ = -e\,(v_2^- - v_1^-), \tag{10}$$

допуская при этом на основании опыта, что постоянная e заключается между 0 и 1; эта постоянная называется *коэффициентом восстановления* и зависит только от физического строения двух тел. Заметим тотчас же, что при $e = 0$ мы возвращаемся к рассмотренному уже предельному случаю двух неупругих тел, а при $e = 1$ отталкивание будет полным, т. е. относительные скорости сближения до удара и удаления после удара будут равны между собой по абсолютной величине, что соответствует идеальному случаю абсолютной упругости сталкивающихся тел.

Теперь задача сводится к отысканию двух неизвестных, v_1^+, v_2^+, из двух линейных уравнений (8), (10); мы придадим этим уравнениям форму, более удобную для механического истолкования, разделяя в уравнении (10) члены, относящиеся к обоим телам, и обозначая через w общее значение обеих частей, т. е. записывая

$$v_1^+ + ev_1^- = v_2^+ + ev_2^- = w. \tag{11}$$

Если в уравнении (8) вместо v_1^+, v_2^+ подставим значения $w - ev_1^-$, $w - ev_2^-$, которые получаются из равенств (11), то получим

$$w = (1 + e)\, v,$$

где v обозначает, как обычно, скорость центра тяжести; после этого из равенств (11) выводятся окончательные формулы

$$v_i^+ = (1 + e)\, v - ev_i^- \qquad (i = 1, 2), \tag{12}$$

которые, естественно, при $e = 0$ снова дают результат, полученный выше для неупругих тел. Следует отметить частный случай двух совершенно упругих тел ($e = 1$) с равными массами ($m_1 = m_2$), для которого $v = (v_1 + v_2)/2$.

Тогда будем иметь

$$v_1^+ = v_2^-, \quad v_2^+ = v_1^-,$$

т. е. два тела после столкновения обмениваются скоростями.

5. Центральный и прямой удар о стену. В предыдущее изложение можно ввести в виде предельного случая задачу о центральном прямом ударе некоторого тела S_1, например шара, о неподвижное препятствие (стена, пол и т. п.). Достаточно уподобить эту стену некоторому телу S_2 с очень большой массой m_2, в пределе бесконечной, и с нулевой скоростью до удара ($v_2^- = 0$). В этом случае из выражения (9) скорости центра тяжести, полагая в нем $v_2 = v_2^- = 0$ и предполагая, что m_2 стремится к бесконечности, мы получим в пределе $v = 0$, так что из первого из уравнений (12) выведем

$$v_1^+ = -ev_1^-; \tag{13}$$

мы пришли, таким образом, опять к эмпирическому закону Ньютона в той его форме, которая соответствует предельному случаю удара о неподвижную стену.

Этот результат подсказывает способ опытного определения коэффициента восстановления e упругого шара при помощи удара о горизонтальную плоскость с определенными физическими свойствами. Действительно, предположим, что шар падает вертикально с некоторой заданной высоты h без начальной скорости, благодаря чему его движение будет поступательным. На основании элементарных формул, относящихся к движению тяжелого твердого тела, или, если угодно, на основании теоремы живых сил мы знаем, что шар упадет на пол со скоростью $\sqrt{2gh}$; после этого он оттолкнется и будет двигаться вверх с начальной скоростью, абсолютное значение которой определится на основании уравнения (13) выражением $e\sqrt{2gh}$. Высоту h_1, на которую он поднимется, можно определить из наблюдений; на основании

теоремы живых сил, применяемой для конца первого отскакивания мы будем иметь

$$2gh_1 = e^2 \cdot 2gh$$

и, следовательно,

$$e = \sqrt{\frac{h_1}{h}}.$$

6. Потеря живой силы при ударе. Формулами (12) п. 4 можно воспользоваться для сравнения значений T^- и T^+ энергии T, которой в общей сложности обладают оба тела непосредственно до и непосредственно после удара. Мы увидим, что изменение $\Delta T = T^+ - T^-$ может быть только отрицательным, или, в исключительных случаях, нулем, так что мы должны будем говорить о *потере* живой силы, и эта потеря по абсолютной величине будет равной $-\Delta T$.

Если вспомним, что, по теореме Кёнига (гл. IV, п. 8), живая сила T какой-нибудь материальной системы равна сумме живой силы T_0 центра тяжести и живой силы $\mathfrak{T}$ системы в ее относительном движении по отношению к центру тяжести, то увидим, что в нашем случае, вследствие неизменности скорости центра тяжести, будем иметь $\Delta T = \Delta\mathfrak{T}$. Далее, по определению, имеем

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m_i (v_i - v)^2 \tag{14}$$

или, подставляя вместо скорости центра тяжести ее выражение (9),

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m}(v_1 - v_2)^2. \tag{14'}$$

С другой стороны, уравнения (12) можно написать в виде

$$v_i^+ - v = -e(v_i^- - v) \qquad (i = 1,\ 2),$$

так что в силу уравнения (14) будем иметь

$$\mathfrak{T}^+ = e^2\mathfrak{T}^-$$

и, следовательно,

$$-\Delta T = -\Delta\mathfrak{T} = (1 - e^2)\,\mathfrak{T}^-, \tag{15}$$

или в силу (14′)

$$-\Delta T = \frac{1}{2}(1 - e^2)\frac{m_1 m_2}{m}(v_1^- - v_2^-)^2. \tag{15'}$$

Мы видим, таким образом, что под действием удара в общем случае, т. е. при $e < 1$, происходит действительная потеря кинетической энергии, и эта потеря определяется уравнением (15) в функции от e и от кинетической энергии до удара $\mathfrak{T}^-$, которую имеет

система в движении относительно центра тяжести; эта последняя в свою очередь на основании уравнения (14′) может быть вычислена при помощи прямых данных вопроса (скоростей до удара).

Из равенства (15′) при $e=1$, т. е. для совершенно упругих тел, следует $\Delta T=0$. Таким образом, оказывается, что явления удара между совершенно упругими телами имеют консервативный характер с чисто механической точки зрения. Эти сложные явления, которые, как мы указывали, происходят за очень короткий промежуток времени τ, не сопровождаются преобразованием энергии в теплоту: взаимному сжатию обоих тел в первой фазе, которая включает в себя преобразование кинетической энергии в потенциальную, соответствует в фазе восстановления полное преобразование энергии в обратном смысле.

Все это вполне соответствует только идеальному предположению $e=1$, так как в действительных случаях коэффициент восстановления будет всегда меньше 1, и всегда будет происходить потеря энергии. Но эта потеря при прочих равных условиях будет тем меньше, чем ближе к 1 будет этот коэффициент, т. е. чем более упругими будут тела, которые приходят в столкновение.

Это и является причиной того, что в технике, когда желают сэкономить максимум кинетической энергии, а с другой стороны, когда невозможно избежать ударов, поступают так, чтобы эти удары происходили между телами, имеющими наиболее совершенную упругость. Так, при прокладке рельсовых путей приходится оставлять между рельсами надлежащие зазоры, чтобы не мешать расширению рельсов при нагревании. Эти стыки при прохождении колес вызывают явления удара, которые ритмично ощущаются даже пассажирами. Чтобы избежать, насколько возможно, рассеяния кинетической энергии, шпалы размещаются не под рельсовыми стыками, а на некотором расстоянии от них так, чтобы сохранить для рельсов наибольшую совместную с требованием устойчивости пути упругость в тех местах, где происходит указанное явление удара.

Формулы (14′), (15′) дают место другим интересным замечаниям, когда предполагается, что одно из двух тел, например S_2, является неподвижным до удара ($v_2^- = 0$), и мы хотим заставить его двигаться, ударяя его телом S_1. Кинетическая энергия, которая требуется для этой цели и приобретается за счет мускульных усилий человека, делающего удар молотком, будет, очевидно, тождественна с энергией до удара $m(v_1^-)^2/2$ тела S_1.

Принимая во внимание формулы (14′), (15′), мы видим, что отношение r потерянной живой силы к затраченной энергии, измеряющее *удельную потерю кинетической энергии*, определяется соотношением

$$r=(1-e^2)\frac{m}{m_1+m_2}.$$

Предположим теперь, что количество энергии, которой располагают, задано, как это и имеет место в только что указанном случае, когда речь идет о мускульной энергии человека.

Если при заданном теле S_2 и при заданном материале, из которого состоит тело S_1, чем определяется коэффициент восстановления e, мы хотим придать телу S_2 наибольшую возможную скорость, то необходимо сделать наименьшей удельную потерю живой силы; а это, как следует из предыдущего выражения для r, достигается тем, что берут по возможности большую массу m_1 для S_1. Так, в случае молотка, приводимого в действие руками человека, удобнее употреблять очень тяжелый молоток, сообщая ему, конечно, соответственно меньшую скорость.

Когда, наоборот, явление удара используется для разрушения тела S_2, а не для сообщения ему скорости, то необходимо сделать значительной потерю живой силы, для того чтобы большая ее часть шла на работу разрушения. Если в этом случае также предполагается заданное количество энергии, которая находится в распоряжении, то непосредственно из выражения r следует, что все должно происходить наоборот: удобнее придать S_1 небольшую массу и, следовательно, значительную скорость (относительно легкий молоток, ударяющий с большой скоростью).

Возьмем снова общую формулу (15) для того, чтобы придать ей новую форму, выражающую частный случай общей теоремы, принадлежащей Карно, которую мы установим в § 26. Для этой цели введем так называемую живую силу потерянных или приобретенных скоростей

$$\Theta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m_i(\Delta v_i)^2.$$

Из формулы (12) следует

$$\Delta v_i = -(1+e)(v_i^- - v) \qquad (i = 1,\ 2),$$

так что, принимая во внимание выражение (14), будем иметь

$$\Theta = (1+e)^2 \mathfrak{T}^-;$$

теперь формуле (15) можно придать вид

$$-\Delta T = \frac{1-e}{1+e}\Theta. \qquad (15'')$$

При $e = 0$ будем иметь упомянутый частный случай теоремы Карно: *при ударе неупругих тел потеря живой силы равна живой силе потерянных скоростей.*

Наоборот, для упругих тел эта потеря будет составлять только некоторую долю от Θ, тем меньшую, чем больше эти тела приближаются к идеальному случаю совершенной упругости ($e = 1$), когда, как уже говорилось, потеря живой силы равна нулю.

7. Второе основное уравнение движения под действием мгновенных сил. Проинтегрируем по времени второе основное уравнение (4) непрерывного движения в течение очень короткого промежутка времени τ, когда действуют мгновенные силы, и примем во внимание, что в силу характеристического постулата о движении под действием мгновенных сил (§ 1) отдельные точки P_i системы сохраняют приблизительно неизменными свои положения.

Учитывая явное выражение (5) момента $\boldsymbol{M}$, получим

$$[\boldsymbol{K}]_{t_0}^{t_0+\tau} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{F}_i\, dt,$$

а отсюда, переходя к пределу при τ, стремящемся к нулю, и вспоминая формулу (6), придем к уравнению

$$\Delta \boldsymbol{K} = \mathbf{M}, \tag{16}$$

где положено

$$\Delta \boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^+ - \boldsymbol{K}^-$$

и

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times \lim_{\tau \to 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{F}_i\, dt = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times \boldsymbol{I}_i.$$

Этот момент $\mathbf{M}$ будет поэтому результирующим моментом относительно точки O внешних импульсов, действующих на систему; уравнение (16) есть так называемое *второе основное уравнение движения* под действием мгновенных сил.

Для приложений этого уравнения важно отметить, что на самом деле уравнение (4), из которого мы исходили, действительно только в предположении, что центр приведения O моментов является неподвижным (или совпадает с центром тяжести системы). Однако, так как в силу только что указанного постулата все точки системы в течение очень короткого промежутка времени τ нужно рассматривать неподвижными, уравнение (16) остается справедливым даже и тогда, когда за полюс принимается одна какая-нибудь из этих точек.

§ 2. Приложение к твердым телам. Баллистический маятник

8. Общие соображения. Свободное твердое тело. Как мы уже знаем из кинематики (т. I, гл. III, § 6), состояние движения твердого тела, т. е. распределение скоростей отдельных его точек в любой момент, определяется двумя векторами: $\boldsymbol{v}_0$ (скорость любой точки O, неподвижной в теле) и $\boldsymbol{\omega}$ (угловая скорость). Следовательно, эффект какого угодно числа ударов, приложенных в заданный момент t_0 к этому твердому телу, будет определен, если удастся указать