

7. ВТОРОЕ ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МГНОВЕННЫХ СИЛ. Проинтегрируем по времени второе основное уравнение (4) непрерывного движения в течение очень короткого промежутка времени  $\tau$ , когда действуют мгновенные силы, и примем во внимание, что в силу характеристического постулата о движении под действием мгновенных сил (§ 1) отдельные точки  $P_i$  системы сохраняют приблизительно неизменными свои положения.

Учитывая явное выражение (5) момента  $M$ , получим

$$[K]_{t_0}^{t_0+\tau} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{OP}_i \times \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}_i dt,$$

а отсюда, переходя к пределу при  $\tau$ , стремящемся к нулю, и вспоминая формулу (6), придем к уравнению

$$\Delta K = M, \quad (16)$$

где положено

$$\Delta K = K^+ - K^-$$

и

$$M = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{OP}_i \times \lim_{\tau \geq 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}_i dt = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{OP}_i \times I_i.$$

Этот момент  $M$  будет поэтому результирующим моментом относительно точки  $O$  внешних импульсов, действующих на систему; уравнение (16) есть так называемое *второе основное уравнение движения* под действием мгновенных сил.

Для приложений этого уравнения важно отметить, что на самом деле уравнение (4), из которого мы исходили, действительно только в предположении, что центр приведения  $O$  моментов является неподвижным (или совпадает с центром тяжести системы). Однако, так как в силу только что указанного постулата все точки системы в течение очень короткого промежутка времени  $\tau$  нужно рассматривать неподвижными, уравнение (16) остается справедливым даже и тогда, когда за полюс принимается одна какая-нибудь из этих точек.

## § 2. Приложение к твердым телам. Баллистический маятник

8. Общие соображения. Свободное твердое тело. Как мы уже знаем из кинематики (т. I, гл. III, § 6), состояние движения твердого тела, т. е. распределение скоростей отдельных его точек в любой момент, определяется двумя векторами:  $v_0$  (скорость любой точки  $O$ , неподвижной в теле) и  $\omega$  (угловая скорость). Следовательно, эффект какого угодно числа ударов, приложенных в заданный момент  $t_0$  к этому твердому телу, будет определен, если удастся указать

соответствующие изменения  $\Delta v_0$ ,  $\Delta \omega$  этих двух характеристических векторов, или, что то же (и даже лучше отвечает общей постановке задачи, сделанной в § 1), значения  $v_0^+$ ,  $\omega^+$  после удара этих двух векторов в функциях от их значений до удара.

Задача, по существу, разрешается как для свободных твердых тел, так и для тел со связями, двумя основными уравнениями импульсивного движения:

$$\Delta Q = R, \quad (7)$$

$$\Delta K = M. \quad (16)$$

Мы убедимся в этом, изучая последовательно типичные случаи свободного твердого тела, твердого тела, движущегося параллельно некоторой плоскости, и твердого тела с одной неподвижной точкой.

Рассмотрим сначала первый случай. Для свободного твердого тела внешние импульсы, а вместе с ними векторы  $R$  и  $M$ , можно будет прямо выразить через данные задачи. С другой стороны, если для упрощения формул мы примем за центр  $O$  моментов центр тяжести, то будем иметь выражение  $Q = mv_0$ , где  $m$  — полная масса системы, а вектор  $K$  (гл. IV, § 19) будет связан с  $\omega$  известным соотношением (относящимся к центру тяжести)

$$K = \sigma(\omega),$$

которое по отношению к главным центральным осям инерции выражается известными равенствами

$$K_x = Ap, \quad K_y = Bq, \quad K_z = Cr,$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , как обычно, обозначают соответствующие главные моменты инерции, а  $p$ ,  $q$ ,  $r$  — проекции вектора  $\omega$ .

Поэтому уравнениям (7), (16) в случае свободного твердого тела можно придать вид

$$m \Delta v_0 = R, \quad (17)$$

$$\Delta \omega = \sigma^{-1}(M); \quad (18)$$

эти два уравнения разрешают задачу о движении под действием мгновенных сил, так как они определяют посредством данных задачи изменения скорости центра тяжести и угловой скорости при ударе.

Полезно обратить внимание на три скалярных уравнения, которые получаются из уравнения (18) после проектирования на три главные центральные оси инерции, т. е. на уравнения

$$A \Delta p = M_x, \quad B \Delta q = M_y, \quad C \Delta r = M_z. \quad (18')$$

9. Изменение живой силы свободного твердого тела под действием прямо приложенных импульсов. Для того чтобы вычислить это изменение  $\Delta T$ , возьмем известное выражение, которое имеет живая

сила  $T$  твердого тела по отношению к ранее принятым осям (гл. IV, § 15),

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} K \cdot \omega = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2).$$

Введя в это выражение сначала значения  $v_0^+$ ,  $\omega^+$  характеристических векторов после удара, а затем значения их до удара, и вычтя полученные равенства почленно, найдем на основании уравнений (17), (18)

$$\Delta T = R \cdot \frac{1}{2} (v_0^+ + v_0^-) + M \cdot \frac{1}{2} (\omega^+ + \omega^-); \quad (19)$$

достаточно вспомнить общее выражение работы системы сил, приложенных к твердому телу (гл. IV, § 3), чтобы убедиться, что в правой части стоит выражение полной работы, совершенной отдельными прямо приложенными импульсами на перемещении твердого тела, определяемом характеристическими векторами

$$\frac{v_0^+ + v_0^-}{2}, \quad \frac{\omega^+ + \omega^-}{2},$$

которые равны средним арифметическим аналогичных характеристических векторов двух состояний движения: до удара и после удара.

Но выражение (19) изменения кинетической энергии нельзя рассматривать как окончательное, так как будут указаны еще и другие значения характеристических векторов.

Для исключения их достаточно взять снова выражения (17), (18), записывая их в виде

$$v_0^+ = \frac{1}{m} R + v_0^-, \quad \omega^+ = \sigma^{-1}(M) + \omega^-,$$

и подставить эти выражения в формулу (19).

Положив

$$W = \frac{1}{2m} R^2 + \frac{1}{2} M \cdot \sigma^{-1}(M) = \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{m} + \frac{M_x^2}{A} + \frac{M_y^2}{B} + \frac{M_z^2}{C} \right), \quad (20)$$

мы получим уравнение

$$\Delta T = W + (R \cdot v_0^- + M \cdot \omega^-), \quad (19')$$

где в правой части все может быть выражено посредством данных задачи, причем первое слагаемое, как это следует из равенства (20), будет существенно положительно, тогда как второе слагаемое изменяет работу, совершенную прямо приложенными импульсами для состояния движения до удара [8].

**10.** Твердое тело, движущееся параллельно неподвижной плоскости. Предположим, что в состоянии движения до удара скорости отдельных точек все параллельны одной и той же неподвижной пло-

скости  $\pi$ , как это имеет место, в частности, в случае неизменяемой плоской фигуры, движущейся в своей плоскости. Если прямо приложенные импульсы имеют результирующую, параллельную плоскости  $\pi$ , а результирующий момент относительно какой-нибудь точки этой плоскости перпендикулярен к ней, то основные уравнения импульсивного движения свободного твердого тела (17), (18) покажут, что и состояние движения после удара будет также параллельным  $\pi$ . Если примем эту плоскость за плоскость координат  $z = 0$ , то три скалярные характеристические величины движения после удара (проекции скорости  $v_0$  центра тяжести на оси  $x$ ,  $y$  и угловая скорость) будут однозначно определены уравнением (17), рассматриваемым как векторное уравнение в плоскости  $\pi$ , и третьим из уравнений (18'), т. е. двумя уравнениями:

$$m \Delta v_0 = R, \quad C \Delta \dot{\theta} = M_z.$$

11. Твердое тело с одной неподвижной точкой. Здесь мы будем рассматривать, вместе с прямо приложенными внешними импульсами, реактивный импульс  $R'$ , который может возникнуть в неподвижной точке  $O$ . Выбрав эту точку за центр приведения моментов, обозначим через  $R$  и  $M$  результирующую и результирующий момент одних только прямо приложенных (внешних) импульсов, благодаря чему  $R$  и  $M$  здесь также следует рассматривать как данные задачи. Так как момент реактивного импульса  $R'$  относительно точки  $O$  равен нулю, то второе основное уравнение импульсивного движения сохранит свой первоначальный вид

$$\Delta K = M; \quad (16)$$

легко видеть, что как и в случае непрерывного движения, это второе из основных уравнений одно достаточно для решения задачи о движении под действием мгновенных сил твердого тела с одной неподвижной точкой. Достаточно заметить, что если для характеристических векторов состояния движения за полюс принимается точка  $O$ , то будем иметь  $\omega_0 = 0$ , так что все сводится к определению изменения  $\Delta\omega$  угловой скорости. Эту величину  $\Delta\omega$ , принимая во внимание, что  $K = \sigma(\omega)$ , мы получим из уравнения (16) в векторном виде

$$\Delta\omega = \sigma^{-1}(M). \quad (18)$$

Эквивалентные уравнения в декартовых координатах здесь все еще имеют вид (18') п. 8, если только за оси, неподвижные в теле, были взяты главные оси инерции твердого тела относительно неподвижной точки  $O$ , а через  $A$ ,  $B$ ,  $C$  были обозначены соответствующие моменты инерции (уже не центральные, как в п. 8).

Важно добавить, что, определив посредством уравнения (18) состояние движения после удара, для вычисления реактивного

импульса  $R'$  можно применить первое основное уравнение (7), которым мы до сих пор еще не пользовались. Действительно, обозначив через  $v_G$  скорость центра тяжести, можно написать это первое основное уравнение в виде

$$m \Delta v_G = R + R'; \quad (21)$$

вспоминая, что

$$v_G = \omega \times \vec{OG},$$

находим

$$\Delta v_G = \Delta \omega \times \vec{OG},$$

так как положение центра тяжести за время удара не изменяется. На основании уравнения (21) мы заключаем, что

$$R' = m \Delta \omega \times \vec{OG} - R, \quad (22)$$

где вместо  $\Delta \omega$  надо подставить его выражение, даваемое уравнением (18).

12. Случай, когда активный импульс не влияет на связь. Если на твердое тело, закрепленное в точке  $O$ , действует единственный активный импульс (не равный нулю)  $I$ , приложенный в одной из его точек  $P$ , то  $R$  и  $M$  нужно положить равными соответственно  $I$  и  $\vec{OP} \times I$ . Обращаясь к этому частному случаю, можно поставить следующий вопрос: возможно ли и при каких условиях, чтобы заданный импульс имел своим результатом исключительно изменение в состоянии движения твердого тела и не оказывал никакого влияния на связь, обеспечивающую неподвижность точки  $O$ . Эта задача может, очевидно, представлять интерес в том случае, когда, например, мы хотим посредством удара внезапно привести в движение твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, если при этом нет уверенности в прочности устройства, осуществляющего связь.

Речь идет о тех случаях, когда  $R' = 0$ , или в силу равенства (22), когда:

$$\Delta \omega \times \vec{OG} = \frac{1}{m} I,$$

если, конечно,  $\Delta \omega$  будет выражено в функции от  $I$  посредством уравнения (18) и соотношения  $M = \vec{OP} \times I$ .

Принимая это во внимание, спроектируем предыдущее векторное уравнение на три главные оси инерции твердого тела относительно точки  $O$ . Если обозначим через  $x_0, y_0, z_0$  известные координаты центра тяжести  $G$  и через  $x, y, z$  координаты точки приложения  $P$

неизвестного импульса  $I$ , то получим три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{z_0}{B} (zI_x - xI_z) - \frac{y_0}{C} (xI_y - yI_x) &= \frac{1}{m} I_x, \\ \frac{x_0}{C} (xI_y - yI_x) - \frac{z_0}{A} (yI_z - zI_y) &= \frac{1}{m} I_y, \\ \frac{y_0}{A} (yI_z - zI_y) - \frac{x_0}{B} (zI_x - xI_z) &= \frac{1}{m} I_z. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Так как эти уравнения являются линейными однородными относительно неизвестных проекций импульса  $I$ , то остается произвольной величина  $I$  этого импульса, о чём можно было догадываться, имея в виду самую физическую природу задачи. Что касается точки  $P$ , к которой приложен импульс  $I$ , то мы видим, исключая из уравнений (23)  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ , что ее координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  связаны уравнением

$$D = \begin{vmatrix} \frac{yy_0}{C} + \frac{zz_0}{B} - \frac{1}{m}, & -\frac{xy_0}{C}, & -\frac{xz_0}{B} \\ -\frac{yx_0}{C}, & \frac{zz_0}{A} + \frac{xx_0}{C} - \frac{1}{m}, & -\frac{yz_0}{A} \\ -\frac{zx_0}{B}, & -\frac{zy_0}{A}, & \frac{xx_0}{B} + \frac{yy_0}{A} - \frac{1}{m} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда заключаем, что геометрическим местом возможных положений точки  $P$  внутри тела будет некоторая поверхность третьего порядка. Для всякой точки этой поверхности уравнения (23) определяют (в общем случае однозначно) направление (но не величину и не сторону) соответствующего импульса  $I$ . Мы не будем задерживаться здесь дольше на общем изучении этой задачи и ограничимся замечанием, что если накладываются ограничительные условия на распределение масс в твердом теле, то может случиться, что указанная здесь поверхность третьего порядка вырождается.

Так, например, если ось  $OG$ , проходящая через точку  $O$  и центр тяжести, является главной осью инерции (как это будет иметь место в еще более частном случае, когда твердое тело имеет гироскопическую структуру относительно точки  $O$ ), то достаточно принять  $OG$  за ось  $Oz$ , чтобы иметь  $x_0 = y_0 = 0$ ; тогда уравнение геометрического места точек  $P$  получит вид

$$D = -\frac{1}{m} \left( \frac{zz_0}{A} - \frac{1}{m} \right) \left( \frac{zz_0}{B} - \frac{1}{m} \right) = 0.$$

Таким образом, мы видим, что точка  $P$  должна лежать на той или другой из двух плоскостей, нормальных к главной центральной оси инерции,

$$zz_0 = \frac{A}{m}, \quad zz_0 = \frac{B}{m},$$

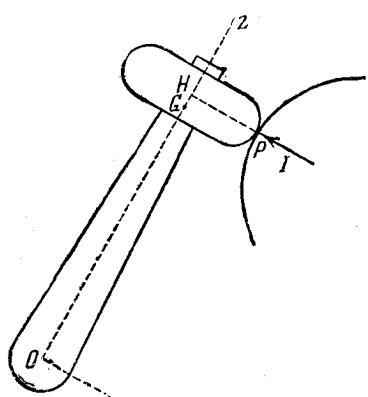
а из уравнений (23) следует, что импульс  $I$ , хотя и может иметь произвольную величину, должен быть параллелен оси  $Oy$  в первом случае и оси  $Ox$  во втором. Поэтому мы заключаем, что для того, чтобы неподвижная точка не испытывала удара, необходимо и достаточно, чтобы импульс был параллелен одной из двух главных осей инерции относительно точки  $O$ , не проходящих через центр тяжести, и чтобы он был приложен на надлежащем расстоянии от плоскости, содержащей эти две оси.

Это расстояние допускает истолкование, на которое следует обратить внимание. Если для определенности предположим, что

$$zz_0 = \frac{A}{m},$$

то точка центральной оси, имеющая координату  $z$ , очевидно, совпадает (гл. VII, п. 6) с той точкой, которую мы назвали *центром качаний* твердого тела вокруг оси  $Ox$ .

Если, в еще более частном случае, твердое тело по отношению к неподвижной точке  $O$  имеет гирокопическую структуру ( $A - B$ ), то все экваториальные направления будут главными; в этом случае необходимо и достаточно, чтобы импульс действовал по одному какому-нибудь из них, конечно, на определенном расстоянии от экваториальной плоскости.



Фиг. 30.

**13. Молоток.** Выводы, к которым мы только что пришли, подсказывают правило, которым можно пользоваться при изготовлении молотка.

Молоток при ударе можно схематически представить в виде твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки  $O$  (рукоятка) (фиг. 30) и находящегося под действием импульса, направленного по некоторой вполне определенной оси  $RH$ , положение которой

зависит от формы молотка и которая приблизительно будет нормальна к поверхности головки в ее центре  $P$ . Очевидно, удобнее всего молоток изготовить так, чтобы по возможности меньше чувствовался при отдаче удара на руку. Это как раз и выражается условием, чтобы приблизительно было равно нулю давление в точке  $O$ , а следовательно, были бы осуществлены определенные выше характеристические соотношения.

Плоскость фигуры, содержащая импульс и центральную ось  $OG$ , для молотка является плоскостью симметрии (геометрической и материальной). Мы будем предполагать далее, что ось  $OG$  для молотка является главной осью инерции, как это наверное будет иметь место,

если плоскость материальной симметрии перпендикулярна к плоскости  $OGP$  и пересекает ее по прямой  $OG$  (случай кузнечного молота).

Если примем плоскость  $OGP$  за плоскость  $yz$ , принимая полу-прямую  $OG$  за положительную ось  $z$ , то при обозначениях предыдущего пункта будем иметь  $x_0 = y_0 = I_x = I_z = 0$ , а  $z_0$  и  $z$  обозначают соответственно длины отрезков  $OG$ ,  $OH$ , так что условие отсутствия отдачи в  $O$  при ударе определяется соотношением

$$OG \cdot OH = \frac{A}{m}.$$

Если, как и в п. 7 гл. VII, введем радиус инерции  $\delta$  молотка относительно центральной оси, перпендикулярной к плоскости фигуры, в силу чего будем иметь

$$A = m(\delta^2 + OG^2),$$

то только что полученное соотношение может быть написано в форме

$$OG \cdot GH = \delta^2.$$

**14.** Твердое тело, имеющее неподвижную ось. Примем за ось  $x$  неподвижную ось, ориентированную как угодно, и обозначим, как в п. 11, через  $R$  и  $M$  результирующую и результирующий момент активных импульсов, принимая за центр  $O$  приведения моментов (который в то же время будет и началом координат) какую-нибудь, пока произвольную точку закрепленной оси. Если  $R'$ ,  $M'$  будут аналогичными векторами, определяющими совокупность реактивных импульсов, возникающих в точках оси  $Ox$ , то основное уравнение моментов (16) после проектирования на эту ось не будет зависеть от  $R'$  и  $M'$  и примет вид

$$\Delta K_x = M_x. \quad (24)$$

Отсюда находим решение задачи о движении под действием мгновенных сил. Действительно, так как речь идет о твердом теле, вращающемся вокруг оси  $Ox$ , то единственной проекцией угловой скорости, не равной нулю, будет  $p$  (угловая скорость вокруг неподвижной оси), и мы будем иметь (гл. IV, п. 20)  $K_x = Ap$ , где  $A$  обозначает момент инерции твердого тела относительно  $Ox$ . Поэтому уравнение (24) можно написать в виде

$$A\Delta p = M_x. \quad (24')$$

Это уравнение непосредственно дает изменение угловой скорости  $p$ .

В этом случае также легко показать, как после определения из уравнения (24') состояния движения после удара можно вычислить векторы  $R'$ ,  $M'$ , определяющие совокупность реактивных импульсов, исходя из основных уравнений импульсивного движения в их векторной форме

$$\Delta Q = R + R', \quad (25)$$

$$\Delta M = M + M'. \quad (26)$$

Чтобы выполнить вычисление, возьмем снова из упомянутого выше п. 20 гл. IV выражения (37), (38) проекций векторов  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{K}$ , т. е. равенства

$$Q_x = 0, \quad Q_y = -mz_0 p, \quad Q_z = my_0 p;$$

$$K_x = Ap, \quad K_y = -C'p, \quad K_z = -B'p;$$

для упрощения формул примем за плоскость  $xz$  плоскость, проходящую через центр тяжести и через ось  $Ox$ , благодаря чему вторая координата центра тяжести  $y_0$  будет равна нулю. Тогда, проектируя уравнения (25), (26) на оси и принимая во внимание уравнение (24'), найдем

$$R'_x = -R_x, \quad R'_y = -\frac{mz_0}{A} M_x - R_y, \quad R'_z = -R_z, \quad (25')$$

$$M'_x = 0, \quad M'_y = -\frac{C'}{A} M_x - M_y, \quad M'_z = -\frac{B'}{A} M_x - M_z. \quad (26')$$

**15.** Случай, когда реактивные импульсы связей представляют собой систему, эквивалентную нулю. Аналогично тому, что мы делали в случае твердого тела с неподвижной точкой (п. 12), можно воспользоваться уравнениями (25'), (26') для того, чтобы найти, при каких условиях единственный импульс  $I$ , не равный нулю, приложенный к твердому телу, имеющему неподвижную ось, в одной из его точек  $P$ , возбуждает реактивные импульсы, которые в своей совокупности уравновешиваются ( $R' = M' = 0$ ).

Так как мы имеем  $R = I$ , то первое и третье уравнения системы (25') показывают, что должно быть  $I_x = I_z = 0$ , или что:

а) *Импульс  $I$  должен действовать нормально к плоскости, проходящей через центр тяжести и через ось.*

Теперь мы можем предположить, что импульс приложен в некоторой точке  $P$  плоскости, проходящей через центр тяжести и через ось, и центр моментов  $O$  (начало координат), положение которого на оси вращения до сих пор не было определено, можно будет взять в основании перпендикуляра, опущенного на ось из точки  $P$ . При этих условиях момент  $M$  единственного прямо приложенного импульса  $I$  будет чисто осевым и, в частности, равным нулю, если импульс приложен прямо к оси, т. е. в точке  $O$ . Однако эта последняя возможность должна быть исключена, так как в этом случае, при моменте  $M_x$ , равном нулю, на основании уравнения (24') не было бы никакого резкого изменения состояния движения; кроме того, в силу уравнения (25') вместе с  $R = I$  должен был бы быть отличным от нуля также и импульс  $R'$ . Итак, имея чисто осевой момент  $M$  и принимая во внимание, что должно быть  $M' = 0$ , из второго и третьего из уравнений (26') получим, что  $B' = C' = 0$ , т. е.:

б) *Ось вращения должна быть одной из главных осей инерции для твердого тела по отношению к основанию  $O$  перпендикуляра, опущенного на нее из точки приложения импульса  $P$ .*

Остается подтвердить условие  $R'_y = 0$  на основании второго из уравнений (25'). Если обозначим через  $z$  третью координату точки  $P$  (расстояние от закрепленной оси), то будем иметь  $M_x = -zI_y$  и, следовательно,

$$zz_0 = \frac{A}{m},$$

откуда следует, что:

в) Точка  $P$  должна лежать на оси качаний твердого тела, соответствующей неподвижной оси (гл. VII, п. 6).

Таким образом, для того чтобы закрепленная ось не испытывала дополнительных давлений, необходимы и достаточны условия „а“, „б“, „в“.

Точка  $P$ , определенная таким образом, называется *центром удара* относительно неподвижной оси, а перпендикуляр через точку  $P$  к плоскости, проходящей через центр тяжести и через ось, т. е. линия действия импульса, — *осью удара*.

Предыдущие выводы можно приложить и к случаю молотка, если рассматривать вопрос более схематично, чем в п. 13, предполагая, что молоток вращается вокруг некоторой оси, а именно (см. чертеж на стр. 478) вокруг оси  $x$ , перпендикулярной в точке  $O$  к плоскости симметрии молотка, в которой предполагается расположенной линия действия импульса. В этом предположении условие „а“ непосредственно удовлетворяется, то же справедливо и по отношению к условию „б“ на основании того, что если материальная система обладает плоскостью симметрии, всякий перпендикуляр к этой плоскости будет главной осью инерции относительно своего основания  $O$ <sup>1)</sup>.

Наконец, условие „в“ принимает ту же самую форму  $OG \cdot OH = \delta^2$ , что и в п. 13, и остается выразить то обстоятельство, что точка  $P$  должна принадлежать оси качаний, соответствующей оси  $Ox$ , вокруг которой вращается молоток.

Из чертежа видно, что след  $O$  оси вращения есть одна из точек оси рукоятки молотка; в силу этого молоток следует держать так, чтобы имелась опора вблизи запястья или локтя, или даже плеча, соответственно размерам и весу молотка: достаточно в этих случаях представить себе точку  $O$  смещенной подходящим образом.

**16. Баллистический маятник.** Теория импульсивного движения твердого тела с закрепленной осью находит интересное применение при измерении скоростей снарядов. Для этой цели употребляется так называемый баллистический маятник, состоящий в основном из орудия,

1) Действительно, если материальная система имеет плоскость симметрии  $x = 0$ , то точки системы попарно имеют равные по величине и противоположные по знаку первые координаты и одинаковые две другие, так что два произведения инерции  $\sum_i m_i x_i y_i$ ,  $\sum_i m_i x_i z_i$  будут равны нулю.

предназначенного для выбрасывания снаряда и неизменно скрепленного с горизонтальной осью подвеса так, что ось канала ствола орудия, которую мы далее будем называть осью орудия, ортогональна к плоскости, проходящей через ось подвеса и центр тяжести  $G$  системы. В момент выстрела маятник, под действием реактивного импульса, которому он подвергается, выходит из положения равновесия и начинает качаться. Мы покажем здесь, как можно получить неизвестную начальную скорость снаряда по наибольшей амплитуде этого качания, измеряемой непосредственно, если известны полная масса  $m_1$  маятника вместе с орудием, но без снаряда, его момент инерции  $A$  относительно оси подвеса, масса  $m$  снаряда и, наконец, расстояния  $r$  и  $a$  оси подвеса соответственно от центра тяжести  $G$  системы и от оси орудия.

Если за положительное направление оси  $x$  принимается то, относительно которого вращение маятника при отдаче оказывается правым и вводится обычный угол  $\theta$ , который плоскость  $xG$  образует с вертикалью, то, как известно,  $p = \dot{\theta}$ , так что для импульсивного движения маятника на основании уравнения (24') и на основании того, что в момент выстрела маятник находится в покое ( $\dot{\theta}^+ = 0$ ), будет иметь место уравнение

$$A\dot{\theta}^+ = M_x, \quad (27)$$

где  $M_x$  обозначает момент импульса, полученного маятником, относительно оси подвеса.

Следующая фаза непрерывного колебательного движения, если отвлечемся от сопротивления воздуха, будет определяться уравнением (живых сил):

$$A\ddot{\theta}^2 - 2m_1gr \cos \theta = 2E. \quad (28)$$

Осевой момент  $M_x$  легко выражается через данные задачи и неизвестную начальную скорость  $v$  снаряда путем применения принципа равенства действия и противодействия. Действительно, снаряд получает импульс, направленный по оси орудия, в левую сторону относительно направленной оси  $x$ ; этот импульс измеряется по абсолютной величине начальным количеством движения  $mv$ . Поэтому реактивный импульс, испытываемый маятником (импульс отдачи), имеет ту же величину и ту же линию действия на расстоянии  $a$  от  $x$ , но направлен в противоположную сторону. Отсюда мы заключаем, что

$$M_x = mav$$

и из уравнения (27) получаем

$$v = \frac{A}{ma} \dot{\theta}^+.$$

Таким образом, остается вычислить угловую скорость  $\dot{\theta}^+$ , сообщаемую маятнику снарядом, которую мы не имеем возможности

измерить прямо; можно, однако, наоборот, выразить ее посредством другой величины, получаемой из опыта, а именно, посредством наибольшего отклонения  $\bar{\theta}$  от вертикали, которое маятник получает при своих колебаниях, следующих за выстрелом. Действительно, отметив это значение  $\theta$ , достаточно воспользоваться уравнением (28) непрерывного колебательного движения, чтобы вывести из него для начального момента движения после выстрела, т. е. при  $\dot{\theta} = \dot{\theta}^+$  и  $\theta = 0$ ,

$$A(\dot{\theta}^+)^2 - 2m_1gr = 2E,$$

а для момента наибольшего отклонения от вертикали, т. е.  $\theta = 0$  и  $\dot{\theta} = \bar{\theta}$ ,

$$-2m_1gr \cos \bar{\theta} = 2E,$$

так что, вычитая последнее равенство из предыдущего почленно и разрешая относительно  $\dot{\theta}^+$ , получим

$$\dot{\theta}^+ = \sqrt{\frac{2m_1gr(1 - \cos \bar{\theta})}{A}},$$

и, следовательно,

$$v = \frac{A}{ma} \sqrt{\frac{2m_1gr(1 - \cos \bar{\theta})}{A}} = \frac{2\sin \frac{\bar{\theta}}{2}}{ma} \sqrt{Am_1gr}.$$

### § 3. Общая теория удара без трения

**17. Овщий случай.** Рассмотрим два тела,  $S_1$ ,  $S_2$ , которые, находясь в каком угодно относительном движении, сталкиваются в заданный момент  $t_0$ . Каждое из них получает со стороны другого некоторую систему импульсов; задача заключается в том, чтобы изучить последующие резкие изменения скоростей или, другими словами, определить состояния движения тел после удара, если известны их состояния движения до удара.

Явление удара оказывается несомненно очень сложным, и относительно его последовательных фаз, за очень короткий промежуток времени  $\tau$ , в течение которого оно происходит, можно повторить рассуждения, уже примененные в п. 4 в элементарном случае центрального и прямого удара. Мы будем придерживаться здесь схемы, предложенной Пуассоном, и попробуем раскрыть сложный ход явлений, предположив прежде всего, что оба тела,  $S_1$ ,  $S_2$ , каждое из которых до удара находится в каком угодно состоянии движения, в момент  $t_0$  сталкиваются только в одной точке  $P$ , правильной для поверхностей обоих тел; эти поверхности будут поэтому иметь в этой точке в момент удара одну и ту же касательную плоскость.