измерить прямо; можно, однако, наоборот, выразить ее посредством другой величины, получаемой из опыта, а именно, посредством наибольшего отклонения $\overline{\theta}$ от вертикали, которое маятник получает при своих колебаниях, следующих за выстрелом. Действительно, отметив это значение θ, достаточно воспользоваться уравнением (28) непрерывного колебательного движения, чтобы вывести из него для начального момента движения после выстрела, т. е. при $\dot{\theta} = \dot{\theta}^+$ и $\theta = 0$,

$$A(\dot{\theta}^+)^2 - 2m_1gr = 2E,$$

а для момента наибольшего отклонения от вертикали, т. е. $\dot{\theta} = 0$ и $\theta = \overline{\theta}$,

$$-2m_1gr\cos\overline{\theta} = 2E,$$

так что, вычитая последнее равенство из предыдущего почленно и разрешая относительно $\dot{\theta}^+$, получим

$$\dot{\theta}^+ = \sqrt{\frac{2m_1gr(1-\cos\overline{\theta})}{A}},$$

и, следовательно,

$$v = \frac{A}{ma}\sqrt{\frac{2m_1gr(1-\cos\overline{\theta})}{A}} = \frac{2\sin\frac{\overline{\theta}}{2}}{ma}\sqrt{Am_1gr}.$$

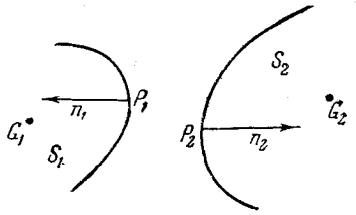
§ 3. Общая теория удара без трения

17. Общий случай. Рассмотрим два тела, S_1, S_2, которые, находясь в каком угодно относительном движении, сталкиваются в заданный момент t_0. Каждое из них получает со стороны другого некоторую систему импульсов; задача заключается в том, чтобы изучить последующие резкие изменения скоростей или, другими словами, определить состояния движения тел после удара, если известны их состояния движения до удара.

Явление удара оказывается несомненно очень сложным, и относительно его последовательных фаз, за очень короткий промежуток времени τ, в течение которого оно происходит, можно повторить рассуждения, уже примененные в п. 4 в элементарном случае центрального и прямого удара. Мы будем придерживаться здесь схемы, предложенной Пуассоном, и попробуем раскрыть сложный ход явлений, предположив прежде всего, что оба тела, S_1, S_2, каждое из которых до удара находится в каком угодно состоянии движения, в момент t_0 сталкиваются только в одной точке P, правильной для поверхностей обоих тел; эти поверхности будут поэтому иметь в этой точке в момент удара одну и ту же касательную плоскость.

Допустив *абсолютную гладкость* двух поверхностей, мы будем иметь, как необходимое следствие, что *для каждого из тел система импульсов, испытываемых вследствие удара, сводится к единственному импульсу, приложенному в точке P и направленному по нормали к поверхности, проведенной внутрь тела.* В соответствии с принципом равенства действия и противодействия надо принять, что *величина I импульса, заранее неизвестная, будет одной и той же для обоих тел.*

Пусть теперь (фиг. 31) для каждого из двух тел S_j $(j = 1, 2)$ m_j есть масса, $\boldsymbol{v}_j$ — скорость центра тяжести G_j, $\boldsymbol{\omega}_j$ — угловая скорость, $\boldsymbol{K}_j$ — результирующий момент количеств движения относительно центра тяжести. Если, далее, обозначим через $\boldsymbol{n}_j$ единичный вектор нормали, внутренней для поверхности, в точке P_j, в которой происходит удар, то импульс неизвестной величины I, испытываемый телом вследствие удара, можно будет представить в виде $I\boldsymbol{n}_j$; с другой стороны, момент $\boldsymbol{K}_j$ связан с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_j$ соответствующей гомографией инерции σ_j, так что будем иметь



Фиг. 31.

$$\boldsymbol{K}_j = \sigma_j(\boldsymbol{\omega}_j) \qquad (j = 1, 2);$$

проектируя это векторное равенство на главные оси инерции относительно центра тяжести и обозначая через A_j, B_j, C_j соответствующие моменты (главные) инерции, через p_j, q_j, r_j аналогичные проекции вектора $\boldsymbol{\omega}_j$, будем иметь

$$K_{j|x} = A_j p_j, \quad K_{j|y} = B_j q_j, \quad K_{j|z} = C_j r_j \qquad (j = 1, 2).$$

При этих обозначениях основные уравнения импульсивного движения (7), (16), составленные для каждого из двух тел, дадут четыре векторных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} m_j \Delta \boldsymbol{v}_j &= I\boldsymbol{n}_j, && (29)\\ \Delta \boldsymbol{K}_j &= I\ \overrightarrow{G_jP_j} \times \boldsymbol{n}_j && (30)\end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2),$$

которые после разрешения их относительно $\Delta\boldsymbol{v}_j$, $\Delta\boldsymbol{\omega}_j$ принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{v}_j &= \frac{1}{m_j} I\boldsymbol{n}_j, && (29')\\ \Delta \boldsymbol{\omega}_j &= I\sigma^{-1}[\overrightarrow{G_jP_j} \times \boldsymbol{n}_j] && (30')\end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2),$$

где, отмечая, как обычно, знаками — и + кинематические характеристики, относящиеся к двум состояниям движения соответственно до

и после удара, мы положили

$$\Delta \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_j^+ - \boldsymbol{v}_j^-, \quad \Delta \boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_j^+ - \boldsymbol{\omega}_j^- \qquad (j = 1, 2).$$

Заметим теперь же, что из уравнений (29′), так как импульс направлен по общей нормали к поверхностям обоих тел, следует для каждого из них инвариантность по отношению к удару касательной составляющей скорости центра тяжести.

Непосредственно видно, что уравнения (29′), (30′) не разрешают еще вполне задачи, так как в выражениях, которые они дают для изменений характеристических векторов $\boldsymbol{v}_j$, $\boldsymbol{\omega}_j$, есть еще неизвестная величина I импульса. Для определения этой неизвестной I необходимо ввести какое-нибудь новое количественное условие, которое, конечно, может быть получено только из опыта.

Для этой цели будем рассматривать скорость, которую имеет в любой момент до или после удара точка P_j и которая, как известно, определяется посредством соответствующих характеристических векторов выражением

$$\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times \overrightarrow{G_j P_j} \qquad (j = 1, 2),$$

и, обозначив через ν_j ее нормальную составляющую по ориентированному направлению единичного вектора $\boldsymbol{n}_j$, т. е. положив

$$\begin{aligned} \nu_j &= \boldsymbol{v}_j \cdot \boldsymbol{n}_j + [\boldsymbol{\omega}_j \times \overrightarrow{G_j P_j}] \cdot \boldsymbol{n}_j = \\ &= \boldsymbol{v}_j \cdot \boldsymbol{n}_j + \boldsymbol{\omega}_j \cdot [\overrightarrow{G_j P_j} \times \boldsymbol{n}_j], \end{aligned} \tag{31}$$

введем скалярную величину

$$w = \nu_1 + \nu_2.$$

Если мы примем во внимание, что два единичных вектора $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, направленных каждый внутрь соответствующего тела, в момент t_0 удара будут прямо противоположны, то увидим, что величина w измеряет непосредственно до и непосредственно после t_0 составляющую скорости (относительной) $P_2 - P_1$ точки P_2 относительно точки P_1 по ориентированному направлению $\boldsymbol{n}_2$ (или, что то же, составляющую по $\boldsymbol{n}_1$ скорости точки P_1 относительно P_2). Так как характер явления требует, чтобы непосредственно до удара оба тела стремились сблизиться, то следует принять $w^- < 0$. Если теперь, отказываясь от анализа тех сложных явлений деформации и последующего восстановления (частичного или полного), которые сопровождают удар, мы ограничимся совокупной оценкой их эффекта, то окажется естественным обобщение гипотезы Ньютона (п. 4), состоящее в допущении, что удар вызывает обращение стороны относительной нормальной скорости двух точек P_1, P_2 и, одновременно, уменьшение соответствующей величины. Другими словами, нам придется положить

$$w^+ = -ew^-, \tag{32}$$

где e обозначает *коэффициент восстановления*, который, как было указано в п. 4, заключен между 0 и 1 и зависит исключительно от физического строения соударяющихся тел. При $e=0$ (*неупругие тела*) нормальная относительная скорость после удара w^+ исчезает и в этом случае оба тела после удара остаются соединенными; наоборот, в случае $e=1$ (*тела совершенно упругие*) нормальная относительная скорость после удара сохраняет то же самое абсолютное значение, что и до удара, но с обратным знаком (*отталкивание*).

Уравнение (32) как раз и есть то новое эмпирическое уравнение, которое позволяет вполне разрешить задачу. Из него следует

$$\Delta w = -(1+e)\, w^-. \tag{32'}$$

С другой стороны, достаточно вспомнить, что при ударе единичные векторы $\boldsymbol{n}_j$ не изменяются и точки P_j, G_j не смещаются, чтобы, подставляя в равенство

$$\Delta w = \Delta v_1 + \Delta v_2$$

вместо Δv_1, Δv_2 их выражения, даваемые уравнениями (31), и учитывая уравнения (29′), (30′), получить уравнение

$$\Delta w = k^2 I, \tag{33}$$

где k^2 обозначает существенно положительную постоянную

$$k^2 = \sum_{j=1}^{2} \left\{ \frac{1}{m_j} + \sigma_j^{-1} [\overrightarrow{G_j P_j} \times \boldsymbol{n}_j] \cdot [\overrightarrow{G_j P_j} \times \boldsymbol{n}_j] \right\};$$

эта постоянная, если через α_j, β_j, γ_i обозначим составляющие $\boldsymbol{n}_j$ и через x_j, y_j, z_j — координаты точки P_j относительно соответствующей системы осей инерции с началом в центре тяжести, может быть выражена через данные задачи в виде

$$k^2 = \sum_{j=1}^{2} \left\{ \frac{1}{m_j} + \frac{(y_j \gamma_j - z_j \beta_j)^2}{A_j} + \frac{(z_j \alpha_j - x_j \gamma_j)^2}{B_j} + \frac{(x_j \beta_j - y_j \alpha_j)^2}{C_j} \right\}.$$

Из сравнения уравнений (32′), (33) получим

$$I = -\frac{1+e}{k^2}\, w^-; \tag{34}$$

достаточно подставить это значение в уравнения (29′), (30′), чтобы получить формулы, разрешающие задачу.

Удар тел друг о друга называется *прямым*, когда скорости центров тяжести до удара $\boldsymbol{v}_j^-$ имеют направление общей нормали к двум поверхностям в точке P. В этом случае из упомянутой выше неизменности касательной составляющей скоростей $\boldsymbol{v}_j$ следует, что ско-

рости после удара v_j^+ будут направлены параллельно той же прямой, что и до удара.

Удар называется *центральным*, если общая нормаль к поверхностям обоих тел в точке P проходит через центры тяжести; этот случай только и возможен, если оба соударяющиеся тела представляют собой однородные шары.

Тогда будем иметь $\overrightarrow{G_jP_j} \times n_j = 0$, так что из уравнения (30) будет следовать, что $\Delta\omega_j = 0$; это значит, что при центральном ударе угловые скорости ω_j обоих тел остаются неизменными, откуда следует, что скорость любой точки Q каждого из двух тел, определяющаяся, как известно, выражением

$$v_j + \overrightarrow{G_jQ} \times \omega_j \qquad (j = 1,\ 2),$$

испытывает при ударе такое же приращение, как и скорость соответствующего центра тяжести. Поэтому, в частности, при центральном ударе касательная составляющая скорости каждой отдельной точки (т. е. составляющая, параллельная касательной плоскости, общей к поверхностям обоих тел) остается неизменной.

18. Удар о стенку. Как и в случае центрального и прямого удара (п. 5), общую задачу об ударе какого-нибудь тела S_1 о неподвижную стенку можно рассматривать как предельный случай задачи, разобранной в предыдущем пункте, если предположить, что тело S_2 имеет очень большую массу m_2 (в пределе — бесконечно большую), находится в покое и закреплено неподвижно ($v_2 = \omega_2 = 0$). Тогда будут справедливы уравнения (29′), (30′) при $j = 1$ и сохранят свое значение также и уравнения (32), (34), если рассматривать w как составляющую по n_1 абсолютной скорости точки P_1.

Из уравнения (32) следует, что тело отталкивается от препятствия, а из уравнения (34) можно определить значение I, которое необходимо подставить в уравнения (29′), (30′) с индексом 1, чтобы получить окончательные формулы.

Если мы ограничимся рассмотрением центрального удара, который только и является возможным, когда речь идет об ударе шара о стенку, то, как и в аналогичном случае удара двух тел, найдем, что касательная составляющая скорости центра тяжести останется неизменной, а нормальная составляющая в силу закона Ньютона изменит свое направление на противоположное и уменьшится по величине в отношении $e : 1$. Поэтому отношение касательной составляющей к нормальной, т. е. тангенс угла между скоростью и нормалью к стенке в точке P, изменится в обратном отношении $1 : e$. Таким образом, мы видим, что *для не вполне упругого тела при центральном ударе о стенку угол отражения будет больше угла падения*, между тем как в идеальном случае совершенно упругих тел ($e = 1$) мы будем иметь равенство этих углов.

19. Потеря кинетической энергии при ударе двух тел. Возьмем снова разрешающие формулы общей задачи об ударе двух тел S_1, S_2 (п. 17) для вычисления, как и в элементарном случае (п. 6), изменения полной живой силы, которое происходит при ударе.

Для каждого тела живая сила определяется (гл. IV, п. 5) из равенства

$$T_j = \frac{1}{2} m_j v_j^2 + \frac{1}{2} K_j \cdot \omega_j \qquad (j = 1, 2),$$

поэтому, принимая во внимание, что $K_j \cdot \omega_j = A_j p_j^2 + B_j q_j^2 + C_j r_j^2$, и применяя тождества

$$\Delta (v_{j\,|\,x})^2 = (v_{j\,|\,x}^+ + v_{j\,|\,x}^-) \Delta v_{j\,|\,x},$$
$$\Delta p_j^2 = (p_j^+ + p_j^-) \Delta p_j$$

и другие аналогичные, получим

$$\Delta T_j = \frac{1}{2} m_j \Delta v_j \cdot (v_j^+ + v_j^-) + \frac{1}{2} \Delta K_j \cdot (\omega_j^+ + \omega_j^-),$$

или на основании уравнений (29), (30), (31)

$$-\Delta T_j = -\frac{1}{2} I n_j \cdot (v_j^+ + v_j^-) - \frac{1}{2} I [\overrightarrow{G_j P_j} \times n_j] \cdot (\omega_j^+ + \omega_j^-) =$$
$$= -\frac{1}{2} I (\nu_j^+ + \nu_j^-).$$

Отсюда, суммируя по индексу j, вводя относительную нормальную скорость w и принимая во внимание равенство (32), для потери полной живой силы $T = T_1 + T_2$ мы получим выражение

$$-\Delta T = -\frac{1}{2} I \cdot (w^+ + w^-) = -\frac{1}{2} (1 - e) I w^-,$$

которое, если подставить вместо I его значение, определяемое формулой (34), принимает окончательный вид:

$$-\Delta T = \frac{1}{2} \frac{1 - e^2}{k^2} (w^-)^2. \tag{35}$$

Таким образом, мы видим, что для несовершенно упругих тел мы имеем действительную потерю живой силы, которая будет тем меньше, чем больше тела приближаются к идеальному случаю совершенно упругих тел, когда мы имели бы сохранение кинетической энергии.

В случае центрального и прямого удара, поскольку в силу первого условия оба векторных произведения $\overrightarrow{G_j P_j} \times n_j$ обращаются в нуль, а в силу второго относительная нормальная скорость по абсолютной величине равна $|v_1 - v_2|$, постоянная k^2 принимает значение

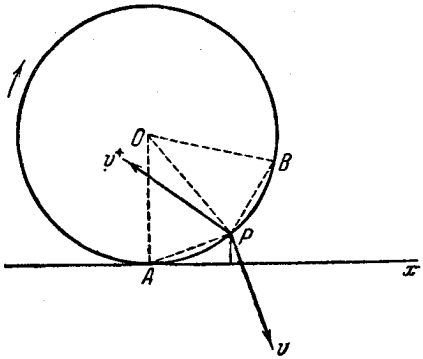
$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2},$$

и уравнение (35) приводится к виду

$$-\Delta T = \frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(v_1^- - v_2^-)^2$$

в согласии с равенством (15′), найденным прямым путем в п. 6.

20. Колесо, ударяющееся о препятствие. В виде приложения полученных результатов рассмотрим колесо, которое, имея центр тяжести в своем центре и оставаясь в вертикальной плоскости, катится без скольжения по горизонтальной плоскости и неожиданно ударяется некоторой точкой P своей окружности о неподвижное препятствие. Предположим, что удар происходит без трения и колесо можно рассматривать как совершенно упругое тело ($e=1$).



Фиг. 32.

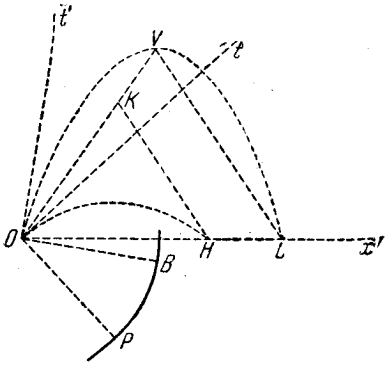
Представим себе, что положение точки P в момент удара определяется углом α, который радиус OP (фиг. 33) образует с вертикальным радиусом OA, идущим к точке касания колеса с плоскостью. Заметим прежде всего, что в силу допущенного отсутствия трения импульс, испытываемый колесом в точке P, будет направлен по нормали к его окружности, т. е. по прямой PO. Таким образом, удар будет центральным и потому мы можем принять, что угловая скорость ω колеса не подвергнется при этом никакому изменению.

С другой стороны, так как в движении до удара, которое, по предположению, является чистым качением, мгновенный центр вращения совпадает с точкой соприкосновения A колеса с плоскостью, то скорость до удара $\boldsymbol{v}^-$ точки P будет перпендикулярна к AP. Скорость же после удара $\boldsymbol{v}^+$, которая на основании правила п. 17 должна иметь касательную составляющую, равную касательной составляющей скорости до удара $\boldsymbol{v}^-$, и в силу закона Ньютона (при $e=1$) нормальную составляющую, прямо противоположную нормальной составляющей скорости $\boldsymbol{v}^-$, необходимо будет представляться вектором, симметричным с $\boldsymbol{v}^-$ относительно касательной в точке P к окружности колеса. Поэтому мгновенный центр вращения в движении после удара, по теореме Шаля (т. I, гл. V, п. 4), попадет на хорду PB, симметричную с PA относительно OP, на расстоянии от P, равном $v^+/\omega = v^-/\omega = AP$, т. е. совпадет как раз с концом B хорды PB.

В этом заключается все, что можно извлечь для нашей задачи из общей теории пп. 17—18. Но интересно рассмотреть, как

действительно будет происходить движение колеса после удара, начиная от только что описанного состояния движения.

Заметим прежде всего, что в силу неизменности при ударе угловой скорости ω и, следовательно, в частности, ее направления, достаточно, чтобы точка B оказалась с той же стороны от вертикального диаметра OA, что и точка P, для того чтобы при элементарном вращении вокруг B, с которого начинается движение после удара, колесо отскакивало как от плоскости, так и от препятствия. В таком случае колесо в своем движении после удара будет следовать законам движения свободного тяжелого тела, так что его центр тяжести будет описывать некоторую параболу $\mathfrak{P}$ (фиг. 33) с вертикальной осью и с вогнутостью, направленной вниз, причем касательная к параболе в начальном положении O будет перпендикулярна к OB.



Фиг. 33.

Тогда, ограничиваясь рассмотрением случая $\alpha < 90°$ (препятствие ниже центра колеса), и вспоминая, что $\widehat{AOB} = 2\alpha$, мы увидим прежде всего, что если угол α заключен между $45°$ и $90°$ (включая концы), то скорость после удара точки O направлена назад; это значит, что колесо не преодолело препятствия и отскочило назад.

Наоборот, при $\alpha < 45°$ скорость после удара точки O обращена вперед и вверх, и колесо может преодолеть препятствие, не ударяясь более о него. Для того чтобы это произошло, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы центр O в своем параболическом движении находился на некотором расстоянии от препятствия, не меньшем радиуса колеса r, или, другими словами, чтобы дуга OL параболы $\mathfrak{P}$, находящаяся над горизонталью Ox', не пересекала над этой горизонталью x' аналогичную дугу OH окружности C с центром в P и радиусом r. Теперь легко видеть, что это последнее условие выражается соотношением

$$OL \geqslant OH \tag{36}$$

между двумя хордами, отсекаемыми соответственно параболой $\mathfrak{P}$ и окружностью C на горизонтали Ox'.

Для доказательства этого заметим сначала, что в то время как касательная t в точке O к дуге круга C, как перпендикуляр к PO, составляет с Ox' угол α, аналогичный угол, образованный с той же самой прямой Ox' касательной t' в точке O к параболе $\mathfrak{P}$, как перпендикуляр к BO, будет равен 2α; поэтому в начале движения после удара парабола $\mathfrak{P}$ будет, конечно, расположена над C.

Мы видим, таким образом, что, если бы, вопреки условию (36), было $OL < OH$, то дуга параболы пересекла бы дугу круга над прямой Ox' и колесо в своем параболическом движении вперед ударилось бы еще раз о препятствие.

Поэтому остается только подтвердить, что соотношение (36) является также и достаточным условием для того, чтобы этого не произошло[1]).

Для этой цели, предположив выполненным равенство (36), вспомним, что если временно за декартовы оси примем Ox' и вертикаль в точке O, направленную вверх, и введем составляющие $v^- \cos 2\alpha$, $v^- \sin 2\alpha$ скорости точки O после удара, то координаты вершины V параболы определятся (т. I, гл. II, п. 31) выражениями

$$\frac{(v^-)^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{q}, \quad \frac{(v^-)^2 \sin^2 2\alpha}{2g},$$

так что будем иметь

$$\operatorname{tg} \widehat{VOL} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

и, следовательно, так как $\alpha < 45°$,

$$\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \widehat{VOL} < \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Полупрямая OV будет поэтому внутренней для угла $\widehat{tt'}$ двух касательных; прямая HK, параллельная к LV, пересечет отрезок OV в какой-нибудь точке K (самое большее совпадающей с V).

Так как дуга круга остается ниже ломаной с двумя сторонами OKH, а эта ломаная в свою очередь будет ниже аналогичной ломаной OVH, полностью лежащей ниже дуги параболы, то заключаем, что, действительно, две дуги не пересекаются над горизонталью Ox'.

Подставляя в уравнение (36) вместо OL (дальность бросания) и OH (хорда круга с центральным углом 2α) их выражения через данные задачи, мы получим соотношение

$$\frac{(v^-)^2}{g} \sin 4\alpha \geqslant 2r \sin \alpha. \tag{36'}$$

---

[1]) Заключение о дальнейшем движении можно получить прямым геометрическим путем, посредством следующего способа, указанного проф. Бискончини.

Наряду с дугой окружности OH рассматривают окружность C' (не указанную на чертеже), касательную в точке O к параболе и имеющую центр на вертикали точки U (оси параболы, тоже не указанной на чертеже). Будучи вполне симметричной по отношению к такой прямой, окружность C' коснется параболы также и в L, и, так как она не может иметь с параболой других общих точек (потому что две точки касания уже исчерпывают четыре точки пересечения), то будет вся целиком внутренней по отношению к той же параболе. С другой стороны, дуга круга $\widehat{OH} \equiv C$ будет в свою очередь внутренней по отношению к C', так что она не сможет пересечь дугу параболы $OVL \equiv \mathfrak{P}$.

Если препятствие сводится к маленькому выступу в полу, т. е. если α очень мало, так что вместо синусов можно подставить без ощутительной погрешности соответствующие углы, то соотношение (36′) получит вид

$$(v^-)^2 \geqslant \frac{1}{2} rg.$$

Отсюда заключаем: для того чтобы колесо не ударилось вторично о препятствие, необходимо и достаточно, чтобы скорость до удара точки обода, ударяющегося о препятствие, была не меньше скорости тяжелого тела, падающего на пол с высоты, равной четверти радиуса колеса.

§ 4. Понятие об ударе с трением

21. Удар неизменяемой плоской фигуры о неподвижное препятствие. В предыдущем пункте мы пренебрегали трением, допуская, что в точке, в которой соударяются два тела, они испытывают два прямо противоположных импульса, по общей нормали к двум поверхностям, направленной для каждого из них внутрь. Задача усложняется, если мы хотим учесть трение скольжения и качения, причем это последнее схематически представляет тот физический факт, что соприкосновение происходит не в геометрической точке, а по некоторой конечной площадке.

Не входя здесь в рассмотрение вопроса в общем виде, мы исследуем только тот случай, когда, отвлекаясь от трения качения, можно довольно простым способом учесть трение скольжения. Это можно сделать в случае двух плоских неизменяемых фигур, движущихся в своей плоскости. Мы рассмотрим, однако, более частный случай — удар плоского неизменямого профиля S о неподвижную преграду представленную схематически в виде некоторой кривой в плоскости; эту кривую в рамках нашего исследования всегда можно заменить ее касательной в точке, в которой происходит удар. Случай двух фигур, движущихся в их плоскости, можно было бы рассмотреть аналогичным образом. Заметим, что обстоятельства, установленные нами выше, осуществляются при ударе биллиардного шара о борт, если предположить, что вращение шара происходит исключительно вокруг вертикали.

Обозначим через P (фиг. 34) точку, в которой в момент t_0 удара происходит соприкосновение между профилем S и препятствием, и возьмем систему неподвижных осей с началом в P, с осью y, направленной вдоль общей нормали к профилю и к преграде и обращенной в сторону S, и с осью x, направленной вдоль преграды и обращенной в ту сторону, где лежит центр тяжести G профиля S (или произвольно, если центр тяжести лежит на оси y). Из этих соглашений следует, что если x_0, y_0 обозначают координаты точки G, то имеем $x_0 \geqslant 0$, $y_0 > 0$.