

Если препятствие сводится к маленькому выступу в полу, т. е. если  $\alpha$  очень мало, так что вместо синусов можно подставить без ощущительной погрешности соответствующие углы, то соотношение (36') получит вид

$$(v^-)^2 \geqslant \frac{1}{2} rg.$$

Отсюда заключаем: для того чтобы колесо не ударило вторично о препятствие, необходимо и достаточно, чтобы скорость до удара точки обода, ударяющегося о препятствие, была не меньше скорости тяжелого тела, падающего на пол с высоты, равной четверти радиуса колеса.

### § 4. Понятие об ударе с трением

21. УДАР НЕИЗМЕНЯЕМОЙ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ О НЕПОДВИЖНОЕ ПРЕПЯТСТВИЕ. В предыдущем пункте мы пренебрегали трением, допуская, что в точке, в которой соударяются два тела, они испытывают два прямо противоположных импульса, по общей нормали к двум поверхностям, направленной для каждого из них внутрь. Задача усложняется, если мы хотим учесть трение скольжения и качения, причем это последнее схематически представляет тот физический факт, что соприкосновение происходит не в геометрической точке, а по некоторой конечной площадке.

Не входя здесь в рассмотрение вопроса в общем виде, мы исследуем только тот случай, когда, отвлекаясь от трения качения, можно довольно простым способом учесть трение скольжения. Это можно сделать в случае двух плоских неизменяемых фигур, движущихся в своей плоскости. Мы рассмотрим, однако, более частный случай — удар плоского неизменяющего профиля  $S$  о неподвижную преграду представленную схематически в виде некоторой кривой в плоскости; эту кривую в рамках нашего исследования всегда можно заменить ее касательной в точке, в которой происходит удар. Случай двух фигур, движущихся в их плоскости, можно было бы рассмотреть аналогичным образом. Заметим, что обстоятельства, установленные нами выше, осуществляются при ударе биллиардного шара о борт, если предположить, что вращение шара происходит исключительно вокруг вертикали.

Обозначим через  $P$  (фиг. 34) точку, в которой в момент  $t_0$  удара происходит соприкосновение между профилем  $S$  и препятствием, и возьмем систему неподвижных осей с началом в  $P$ , с осью  $y$ , направленной вдоль общей нормали к профилю и к преграде и обращенной в сторону  $S$ , и с осью  $x$ , направленной вдоль преграды и обращенной в ту сторону, где лежит центр тяжести  $G$  профиля  $S$  (или произвольно, если центр тяжести лежит на оси  $y$ ). Из этих соглашений следует, что если  $x_0$ ,  $y_0$  обозначают координаты точки  $G$ , то имеем  $x_0 \geqslant 0$ ,  $y_0 > 0$ .

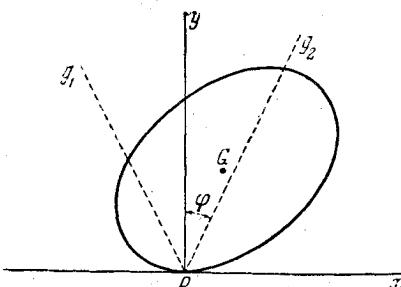
С другой стороны, необходимо принять во внимание, что импульс  $I$ , который в момент удара возникает в  $P$ , действует в ту сторону от оси  $Px$ , где лежит  $S$ , так что, если  $XY$  суть соответствующие составляющие, то необходимо имеем  $Y > 0$ . Кроме того, этот импульс, по определению, равен

$$I = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \Phi dt,$$

где  $\Phi$  в любой момент очень короткого промежутка времени  $\tau$  представляет собой реакцию, которая согласно законам трения скольжения всегда принадлежит углу  $\widehat{g_1 g_2}$  величины  $2\varphi$  с биссектрисой  $Oy$ , если  $\varphi$  есть соответствующий угол трения. Отсюда мы видим, что то же самое произойдет и с только что написанным интегралом и, следовательно, в пределе и с самим импульсом  $I$ .

Заметив это, обратимся к основным уравнениям движения под действием мгновенных сил в плоском случае (п. 10), учитывая, что результирующая импульсов  $R$  сводится к  $I$  и что, так как  $M = \overrightarrow{GP} \times I$ , будем иметь

$$M_z = y_0 X - x_0 Y.$$



Фиг. 34.

Поэтому уравнения п. 10, если через  $w, v$  обозначим проекции скорости центра тяжести  $\omega_0$ , а вместо  $C$  напишем  $m\delta^2$ , где  $\delta$  есть центральный радиус инерции фигуры  $S$ , принимают вид

$$\Delta u = \frac{1}{m} X, \quad \Delta v = \frac{1}{m} Y, \quad \Delta \dot{\theta} = \frac{1}{m\delta^2} (y_0 X - x_0 Y). \quad (37)$$

В эти выражения для изменений, испытываемых при ударе тремя характеристическими величинами  $u, v, \dot{\theta}$ , входят две неизвестные проекции  $X, Y$  реактивного импульса, а потому, чтобы сделать задачу определенной, необходимо ввести еще два условия. Заметим теперь же, что к одному из них мы придем, допуская применимость также и в этом случае эмпирического закона Ньютона, а другое будет получено из исследования влияния трения.

Заметим сначала, что точка профиля, которая в момент  $t_0$  находится в  $P$ , как неизменно связанная с  $S$ , имеет скорость

$$\omega_0 + \omega \times \overrightarrow{GP},$$

а проекции  $\sigma$  и  $v$  этой скорости на оси  $Ox$ ,  $Oy$ , ввиду того что пространственные проекции вектора  $\omega$  суть  $0, 0, \dot{\theta}$ , имеют выражения

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= u + y_0 \dot{\theta}, \\ v &= v - x_0 \dot{\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Касательная составляющая определяет скольжение профиля  $S$  по препятствию. Что же касается нормальной составляющей  $v$ , то надо заметить, что при сближении до удара и удалении тотчас же после удара (если исключить случай совершенно неупругих тел) значение этой составляющей до удара ( $v^-$ ) существенно отрицательно, а значение ее после удара ( $v^+$ ) существенно положительно. Как уже было указано, мы допустим здесь еще раз применимость закона Ньютона

$$v^+ = -ev^-, \quad (39)$$

где  $e$  обозначает коэффициент восстановления сталкивающихся тел.

Чтобы с выгодой использовать равенство (39), заметим, что из равенств (38) на основании уравнений (37) непосредственно следуют два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma &= \frac{1}{m} \left\{ \left( 1 + \frac{y_0^2}{\delta^2} \right) X - \frac{x_0 y_0}{\delta^2} Y \right\}, \\ \Delta v &= \frac{1}{m} \left\{ -\frac{x_0 y_0}{\delta^2} X + \left( 1 + \frac{x_0^2}{\delta^2} \right) Y \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

если положить в этих уравнениях

$$a = \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{x_0^2}{\delta^2} \right), \quad b = \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{y_0^2}{\delta^2} \right), \quad c = \frac{1}{m} \frac{x_0 y_0}{\delta^2}$$

и исключить из второго  $v^+$  при помощи равенства (39), то они преобразуются в следующие:

$$\sigma^+ = \sigma^- + bX - cY. \quad (41)$$

$$-(1 + e)v^- = -cX + aY. \quad (42)$$

Важно отметить, что постоянные  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , введенные таким образом в качестве структурных данных профиля  $S$ , все три положительны: первые две по существу, а третья в силу наших допущений (так как  $c = 0$  только тогда, когда  $G$  лежит на  $Oy$ ); кроме того, имеем

$$ab > c^2. \quad (43)$$

Уравнение (42), левая часть которого так же, как  $a$  и  $c$ , является известной постоянной, дает в более удобной для нашей цели форме одно из искомых уравнений, связывающих вспомогательные неизвестные  $X$ ,  $Y$ .

Уравнение (41), наоборот, вместе с неизвестными  $X$ ,  $Y$ , содержит еще неизвестную  $\sigma^+$ ; для того чтобы довести задачу до конца, мы

должны рассмотреть при помощи законов Кулона, относящихся к трению скольжения (статического и динамического), поведение реакции  $\Phi$  за очень короткий промежуток времени  $\tau$ , в течение которого действительно происходит явление удара.

Для облегчения этого анализа и последующих рассуждений обратимся к геометрическому представлению. Следуя Раусу, введем точку  $R$  с координатами  $X, Y$ , т. е. свободный конец вектора  $I$ , приложенного в точке  $P$ , и заметим прежде всего, что он должен находиться на прямой  $r$ , определяемой уравнением (42). По знакам коэффициентов мы видим, что прямая  $r$  пересекает ось  $x$  в точке с отрицательной абсциссой (или бесконечно удаленной) и ось  $y$  в точке с положительной ординатой, так что она имеет некоторую общую точку  $A$  (см. фиг. на стр. 497—499) с той стороной  $q_1$  двойного угла трения  $\widehat{q_1 q_2} = 2\varphi$ , относящегося к преграде в  $P$ , которая лежит во втором квадранте осей. Обозначая через  $\psi$  угол (положительный и острый), который эта прямая образует с осью  $y$ , будем иметь

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a}{c}; \quad (44)$$

прямая  $r$  пересечет также полупрямую  $g_2$  в некоторой точке  $B$  или будет лежать, начиная от точки  $A$ , вся внутри угла  $\widehat{g_1, g_2}$ , в зависимости от того, будет ли  $\psi > \varphi$  или  $\psi \leq \varphi$ .

Напишем теперь снова уравнение (41), полагая

$$p^+ = \frac{\sigma^+}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad p^- = \frac{\sigma^-}{\sqrt{b^2 + c^2}};$$

$$\cos \widehat{x n} = -\frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \sin \widehat{x n} = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

В силу этого уравнение (41) принимает вид

$$p^+ = -(X \cos \widehat{x n} + Y \sin \widehat{x n} - p^-) \quad (41')$$

и позволяет истолковать неизвестную  $p^+$  как расстояние точки  $R$  от прямой  $s$ , нормальное уравнение которой есть

$$x \cos \widehat{x n} + y \sin \widehat{x n} - p^- = 0. \quad (45)$$

Эту прямую можно назвать прямой нулевого скольжения, так как скорость скольжения  $\sigma^+$  после удара обращается в нуль только тогда, когда точка  $R$  лежит на ней.

Направленная нормаль  $n$  к  $s$ , проходящая через начало, как это следует из выражений ее направляющих косинусов, принадлежит ко второму квадранту осей. Естественно, что прямая  $s$  пересекает эту нормаль с той или другой стороны от начала, смотря по знаку величины  $p^-$  или, что то же, по знаку скорости скольжения  $\sigma^-$  до удара.

В обоих случаях прямая  $s$  согласно обычным соглашениям аналитической геометрии будет направлена вверх (т. е. в сторону возрастающих  $y$ ), и угол  $\chi$  (положительный и острый), который она образует с осью  $y$ , определяется соотношением  $\operatorname{tg} \chi = c/b$ , так что, принимая во внимание равенства (44) и (43), мы видим, что  $\psi > \chi$ .

Обращаясь теперь к исследованию явления удара в последовательные моменты очень краткого промежутка времени  $\tau$ , в течение которого он происходит, обозначим через  $t$  какой-нибудь один из этих моментов и рассмотрим соответствующее значение импульса

$$I_t = \int_{t_0}^t \Phi dt$$

с проекциями  $X_t$ ,  $Y_t$  и скорость скольжения  $\sigma_t$  для того же момента. В этот момент  $t$  изменения, испытываемые характеристическими величинами  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ , будут определяться теми же уравнениями (37), в которых вместо  $X$ ,  $Y$  надо подставить  $X_t$ ,  $Y_t$ . Вместо уравнения (41) или эквивалентного ему уравнения (41') будет иметь место уравнение

$$p_t = -(X_t \cos \widehat{xn} + Y_t \sin \widehat{xn} - p^-), \quad (46)$$

где положено

$$p_t = \frac{\sigma_t}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Обозначим через  $R_t$  точку с координатами  $X_t$ ,  $Y_t$ , которая представляет в любой момент соответствующее значение  $I_t$  импульса. Задача заключается в том, чтобы определить, каков будет путь, описываемый точкой  $R_t$ , за промежуток времени от  $t_0$  до  $t_0 + \tau$ , начиная от положения  $P$ , из которого она выходит в момент  $t_0$ , и каково будет конечное положение  $R$ , которого достигает  $R_t$  в момент  $t_0 + \tau$  на прямой  $r$ .

Для этой цели, как уже указывалось, нам надо только принять во внимание эмпирические законы трения скольжения. Прежде всего, заметим, что, по определению, имеем  $dR_t = dI_t = \Phi dt$ ; вспоминая, что импульс  $\Phi$  всегда будет обращен наружу от преграды, мы видим, что на чертеже путь точки  $R_t$  от  $P$  до  $R$  должен быть направлен вверх. Кроме того, в силу законов динамического трения, направление движения точки  $R_t$ , совпадающее с направлением реактивного импульса  $\Phi$ , который должен быть противоположным скольжению, будет совпадать с направлением  $g_1$  или  $g_2$ , смотря по тому, будет ли  $\sigma_t > 0$  или  $\sigma_t < 0$ ; если же в некоторый момент  $t$   $\sigma_t$  исчезает, то  $R_t$  будет находиться на прямой  $s$  нулевого скольжения и элементарное перемещение точки  $R_t$  будет подчинено только условию лежать внутри угла  $\widehat{g_1 g_2}$ ; оно будет оставаться внутри

этого угла, пока скорость скольжения остается равной нулю, а это требует, чтобы угол  $\chi = \widehat{ys}$  был меньше угла трения  $\varphi$ .

Предыдущие рассуждения легко приводят к определению конечного положения  $R$  точки  $R_t$  на прямой  $r$ , если будем рассматривать отдельно два общих случая: I.  $\sigma^- > 0$ , II.  $\sigma^- < 0$  и различные частные случаи, которые в них входят.

Надо тотчас же отметить, что так как  $p^-$  имеет тот же самый знак, что и  $\sigma^-$  (и исчезает вместе с  $\sigma^-$ ), прямая  $s$  нулевого скольжения, определяемая равенством (45), в случае I имеет общую точку  $H$  с полупрямой  $g_1$  ( $H$  совпадает с  $P$  при  $\sigma^- = 0$ ), а в случае II — с продолжением этой полупрямой; важно помнить, что во всех случаях прямая  $s$ , начиная от точки  $H$ , идет вправо и вверх.

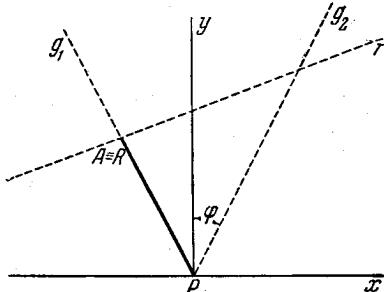
I.  $\sigma^- \geq 0$ . Рассмотрим сначала общий случай, когда имеет место неравенство. Так как перемещение  $dR_t = \Phi dt$  должно быть противоположно скольжению, то точка  $R_t$  начинает подниматься от  $P$  вдоль полупрямой  $g_1$ , которая встречается в точке  $A$  с прямой  $r$ ; теперь необходимо рассмотреть отдельно два случая: когда точка  $H$ , в которой в этом случае прямая  $s$  пересекается с полупрямой  $g_1$ , будет внешней для отрезка  $PA$  и когда она будет лежать на этом отрезке.

I<sub>1</sub>.  $H$  есть точка, внешняя для отрезка  $AP$ . Точка  $R_t$  движется из  $P$  вдоль  $g_1$  до точки  $A$ , которая составляет для нее конечное положение  $R$  (фиг. 35).

Если, далее, точка  $H$ , в которой  $s$  пересекает  $g_1$ , лежит на отрезке  $PA$ , то необходимо различать два частных случая, смотря по тому, будет ли  $\chi \leq \varphi$  или  $\chi > \varphi$ .

I<sub>2</sub>. Точка  $H$  лежит на отрезке  $PA$  (фиг. 36) и  $\chi \leq \varphi$ . Так как во всех случаях имеем  $\psi > \chi$  и, следовательно,  $\psi + \varphi > \chi + \varphi$ , то достаточно применить постулат Евклида к двум прямым  $r$  и  $s$  и к прямой  $g_1$ , чтобы видеть, что  $r$  и  $s$  пересекаются в некоторой точке справа от  $g_1$ , а так как, далее,  $s$  образует с осью  $y$  угол  $\chi$ , меньший или самое большое равный  $\varphi$ , то эта точка будет лежать необходиомо внутри угла  $\widehat{g_1 g_2}$ . Точка  $R_t$ , пробежав отрезок  $PH$  прямой  $g_1$ , переходит на прямую  $s$  и движется по ней вверх до тех пор, пока не достигнет точки пересечения ее с  $r$ , которая и будет ее конечным положением.

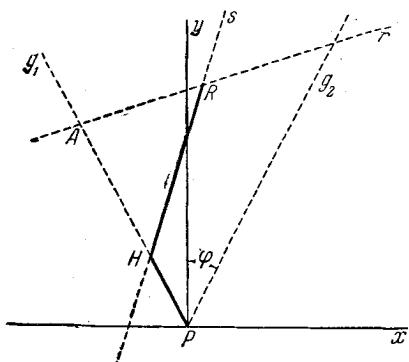
I<sub>3</sub>. Точка  $H$  лежит на отрезке  $PA$  (фиг. 37) и  $\chi > \varphi$ . Точка  $R_t$ , прияа из  $P$  вдоль  $g_1$  в  $H$ , не может идти вдоль  $s$ , потому что прямая  $s$  образует с осью  $y$  угол  $\chi$ , больший угла трения; а так как



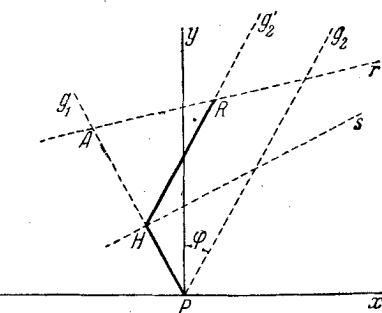
Фиг. 35.

по ту сторону от прямой  $s_{t_1}$  и, следовательно, скорость скольжения  $\sigma_t$  становятся отрицательными, то точка продолжает двигаться, начиная от  $H$ , вдоль прямой  $g'_2$ , параллельной  $g_2$ , вверх.

Так как имеем  $\psi > \chi > \varphi$ , то угол  $\varphi + \psi$ , который  $r$  образует с  $g_1$ , будет больше аналогичного угла  $2\varphi$ , образованного с той же трансверсалю прямой  $g'_2$ ; поэтому, как и выше для  $r$ ,  $s$ , мы заключаем, что  $r$ ,  $g'_2$  пересекаются в некоторой точке угла  $\widehat{g_1 g_2}$ , которая и есть конечное положение  $R$  точки  $R_t$ .



Фиг. 36.



Фиг. 37.

Исключавшееся до сих пор частное предположение  $\sigma^- = 0$  соответствует тем частным случаям из  $I_2$ ,  $I_3$ , когда  $H$  совпадает с  $P$ .

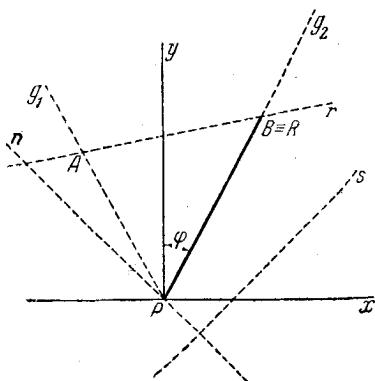
II.  $\sigma^- < 0$ . Так как дифференциал  $dR_t$  должен быть противоположен скорости скольжения, которая вначале отрицательна, то точка  $R_t$  начинает подниматься из  $P$  вдоль  $g_2$  и идет вверх, по крайней мере, до тех пор, пока не встретит прямую  $r$  или  $s$ . Не может случиться, чтобы никакая из этих двух прямых не пересекала полу-прямую  $g_2$ , так как такое предположение влекло бы за собой (как это можно видеть, рассматривая ось  $y$ , которая при условии II пересекается прямой  $s$  ниже начала) два соотношения  $\psi \leq \varphi$ ,  $\varphi \leq \chi$ , противоречащие неравенству  $\varphi > \chi$ . Поэтому будем различать два следующих частных случая:

II<sub>1</sub>. Прямая  $r$  пересекает  $g_2$  в такой точке  $B$  (фиг. 38), что отрезок  $PB$  не имеет общих точек с  $s$ . Точка  $R_t$  пробегает отрезок  $PB$  и в точке  $B$  имеет свое конечное положение  $R$ .

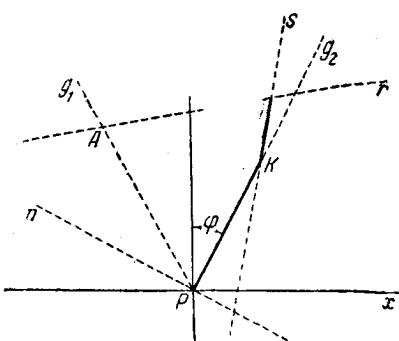
II<sub>2</sub>. Прямая  $s$  пересекает  $g_2$  в такой точке  $K$  (фиг. 39), что отрезок  $PK$  не имеет общих точек с  $r$ . В этом случае мы имеем  $\chi < \varphi$ ; с другой стороны, прямые  $r$ ,  $s$ , которые справа от оси  $y$  образуют с ней два соответствующих угла  $\psi$ ,  $\chi$ , таких, что  $\psi > \chi$ , пересекаются с той же стороны от  $y$  в некоторой точке, которая в силу предположения, что точка  $K$  находится под прямой  $r$ , будет вну-

тренней для угла  $\widehat{g_1 g_2}$ . Точка  $R_t$ , выходя из точки  $P$ , идет по прямой  $g_2$  до точки  $K$ , затем идет вдоль прямой  $s$ , которая образует с осью  $y$  угол  $\chi$ , меньший угла трения  $\varphi$ , и приходит в точку пересечения  $R$  прямых  $s$  и  $r$ .

После того как мы исчерпали таким образом все возможные случаи, едва ли необходимо прибавлять, что в любом случае, когда будет



Фиг. 38.



Фиг. 39.

определенна точка  $R$  и, следовательно, будут определены ее координаты  $X, Y$ , первоначальные уравнения (40) дадут полное решение задачи.

Не входя в дальнейшее развитие этой теории, мы отсылаем читателя за большими подробностями к трактату Рэуса<sup>1)</sup> и к оригинальным работам Дарбу<sup>2)</sup>, А. Майера<sup>3)</sup> и Пере<sup>4)</sup>.

## § 5. Общие теоремы импульсивного движения

**22.** Овьшее уравнение импульсивного движения. Рассмотрим какую-нибудь материальную систему, состоящую из  $N$  точек  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), на которую наложены связи без трения, и ограничимся предположением, что все связи являются двусторонними (неосвобождающими); обращаем внимание на то, что в теории импульсивного движения и, в частности, в случаях столкновений односторонние связи имеют совсем

<sup>1)</sup> Routh, Treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies, т. 1, 4-е изд., London, 1897, гл. IV, §§ 187—197, 315—330.

<sup>2)</sup> G. Darboux, Études géométriques sur les percussions et le choc des corps, Bull. des sc. math., сер. 2-я, т. IV, 1880, § IV, стр. 126—160.

<sup>3)</sup> A. Mayeur, Ueber den Zusammenstoss ...., Leipz. Berichte, 1902, стр. 201—243.

<sup>4)</sup> Pérès, Choc en tenant compte du frottement. Choc de deux solides avec frottement, Nouv. Ann. de math., сер. 5-я, т. II, стр. 98—108, 216—231.