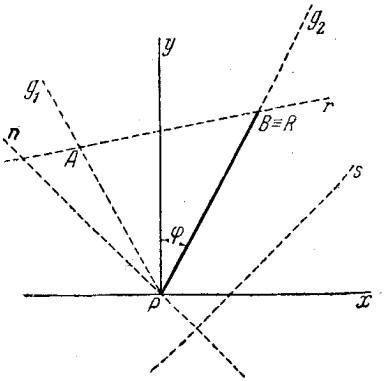
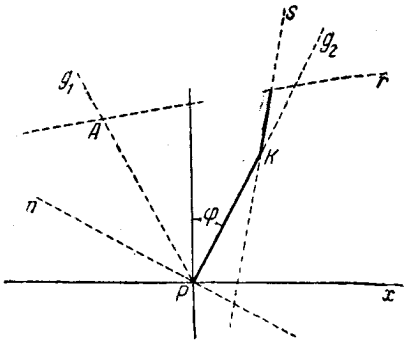
тренней для угла $\widehat{g_1 g_2}$. Точка R_t, выходя из точки P, идет по прямой g_2 до точки K, затем идет вдоль прямой s, которая образует с осью y угол χ, меньший угла трения φ, и приходит в точку пересечения R прямых s и r.

После того как мы исчерпали таким образом все возможные случаи, едва ли необходимо прибавлять, что в любом случае, когда будет



Фиг. 38.



Фиг. 39.

определена точка R и, следовательно, будут определены ее координаты X, Y, первоначальные уравнения (40) дадут полное решение задачи.

Не входя в дальнейшее развитие этой теории, мы отсылаем читателя за большими подробностями к трактату Рауса [1] и к оригинальным работам Дарбу [2], А. Майера [3] и Пере [4].

§ 5. Общие теоремы импульсивного движения

22. Общее уравнение импульсивного движения. Рассмотрим какую-нибудь материальную систему, состоящую из N точек P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$, на которую наложены связи без трения, и ограничимся предположением, что все связи являются двусторонними (неосвобождающими); обращаем внимание на то, что в теории импульсивного движения и, в частности, в случаях столкновений односторонние связи имеют совсем

---

[1] Routh, Treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies, т. I, 4-е изд., London, 1897, гл. IV, §§ 187—197, 315—330.

[2] G. Darboux, Études géométriques sur les percussions et le choc des corps, Bull. des sc. math., сер. 2-я, т. IV, 1880, § IV, стр. 126—160.

[3] A. Mayer, Ueber den Zusammenstoss ...., Leipz. Berichte, 1902, стр. 201—243.

[4] Pérès, Choc en tenant compte du frottement. Choc de deux solides avec frottement, *Nouv. Ann. de math.*, сер. 5-я, т. II, стр. 98—108, 216—231.

особый интерес. Случаев, когда входят связи этого последнего типа, мы коснемся слегка в конце этого параграфа (п. 13).

Как уже говорилось в п. 1, даже и в те очень короткие промежутки времени τ, когда на систему действуют мгновенные силы, остаются в силе основные постулаты динамики и, следовательно, остается в силе также и общее уравнение движения, которое все их объединяет (гл. V, п. 20), т. е. уравнение

$$\sum_{i=1}^{N}(F_i - ma_i)\times\delta P_i = 0, \tag{47}$$

где, конечно, в результирующую силу F_i, прямо приложенную к любой точке P_i, должны быть включены в любой момент также и возможные активные ударные силы или удары.

Обращаясь как раз к промежутку времени от t_0 до $t_0+\tau$, когда действуют такие удары, введем N результирующих активных импульсов

$$I_i = \lim_{\tau\to 0}\int_{t_0}^{t_0+\tau} F_i\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

и проинтегрируем уравнение (47) по времени от t_0 до $t_0+\tau$, допуская, что в этот очень короткий промежуток времени виртуальные перемещения δP_i можно рассматривать как не зависящие от времени. Если после этого интегрирования заставим τ стремиться к нулю и заметим, что

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{t_0}^{t_0+\tau} a_i dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

дает обычное изменение Δv_i скорости любой точки P_i, то придем к уравнению

$$\sum_{i=1}^{N}(I_i - m_i\,\Delta v_i)\cdot\delta P_i = 0, \tag{48}$$

представляющему собой общее уравнение импульсивного движения.

Это уравнение справедливо для системы бесконечно малых перемещений δP_i, совместимых со связями при явно выраженном в предыдущем интегрировании предположении, что за очень короткий промежуток времени, в течение которого действуют мгновенные силы, связи остаются (приблизительно) неизменными.

Обратим внимание на то, что это не исключает возможности резких изменений связей одновременно с действием импульсов. Мы допустим только, что в согласии с предположением о неизменности связей в течение очень короткого промежутка времени τ, когда действуют удары, во всех случаях каждое из возможных резких изменений связей можно рассматривать как происходящее или непосредственно

до или непосредственно после этого весьма короткого промежутка, в течение которого происходит импульсивное движение.

Так, например, если у свободно падающего тела закрепляются неожиданно одна или две точки, то вводятся связи (закрепление в точке, или вдоль оси), под действием которых, по крайней мере в общем случае, должны возникнуть резкие изменения скоростей, потому что движение тела до удара в общем случае не было таким, которое характерно для твердого тела с неподвижной точкой или осью. В этом случае надо принять, что резкое изменение связей произошло до момента, начиная с которого рассматривается импульсивное движение, и уравнение (48) должно применяться только к тем виртуальным перемещениям, которые совместимы со связями, вводимыми внезапно, причем нужно иметь в виду, что в этом специальном случае не войдут активные импульсы ($\boldsymbol{I}_i = 0$).

Подобным же образом, если в твердом теле происходит взрыв, который можно схематически представить системой импульсов внутренней природы, то наступает внезапное резкое уничтожение связи, так как после взрыва вместо 6 получится $6N$ степеней свободы, если N есть число осколков; виртуальные перемещения, которые нужно ввести в уравнение (48), должны соответствовать связям системы после их внезапного резкого изменения.

Наоборот, в явлениях столкновений, которыми мы занимались в двух предыдущих пунктах, условие соприкосновения между двумя твердыми телами или между твердым телом и стенкой перестает выполняться, когда удар уже произошел, так что имеется внезапное резкое уничтожение связи, следующее за явлением удара.

Если связи, которые должны быть приняты во внимание при изучении импульсивного движения и, следовательно, при использовании уравнения (48), сохраняются неизменными при движении, происходящем после удара, в течение некоторого промежутка времени, хотя и короткого, но конечного, следующего за моментом $t_0 + \tau$, то они называются устойчивыми. Так, обращаясь к примерам, взятым выше, мы должны считать устойчивой связь, возникающую при внезапном закреплении точки или оси падающего твердого тела, в то время как условие соприкосновения между двумя телами при столкновении не является устойчивой связью.

В дальнейшем (п. 29) мы увидим, как, по крайней мере в случае голономных систем, общее уравнение (48) приводит к однозначному определению движения системы после удара, если известны движение до удара и система прямо приложенных импульсов $\boldsymbol{I}_i$. Но сначала мы получим из уравнения (48) некоторые следствия общего характера, а для этой цели мы должны прежде всего уточнить, с формальной точки зрения, условия, определяющие виртуальные перемещения δP_i.

Вспомним (т. I, гл. XV, п. 7), что, как это уже отмечалось и в п. 3 предыдущей главы, при изложении принципа наименьшего принуждения Гаусса, двусторонние связи, голономные или неголономные,

наложенные на состояние движения какой-нибудь системы, всегда могут быть выражены посредством уравнений вида

$$B_k(\boldsymbol{v}) = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{49}$$

где $B_k(\boldsymbol{v})$ символически представляют линейные однородные функции от проекций скоростей $\boldsymbol{v}_i$ точек системы, коэффициенты которых, так же как и скалярные величины b_k в правых частях, суть известные функции координат, а возможно, и времени; поэтому за очень короткий интересующий нас промежуток времени τ они должны рассматриваться как постоянные.

На основании определения виртуальных перемещений связи, которым должны удовлетворять δP_i, выражаются соответствующими линейными и однородными уравнениями

$$B_k(\delta P) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r); \tag{50}$$

для некоторых выводов, которые мы имеем в виду, важно отметить, что, в то время как значения $\boldsymbol{v}_i^-$ скоростей до удара могут и не удовлетворять уравнениям (49), так как эти уравнения относятся к промежутку времени τ, в течение которого связи могут не быть теми же самыми, что и до удара, скорости $\boldsymbol{v}_i^+$, в известном смысле отражающие действие всего того, что происходило в элемент времени τ, необходимо должны удовлетворять уравнениям (49).

Если затем рассмотрим отвлеченно какое-нибудь движение $\boldsymbol{v}_i$, совместимое с уравнениями (49) (совпадающее или несовпадающее с движением после удара), и припишем скоростям изменения $\delta\boldsymbol{v}_i$, которые соответствовали бы условиям (49), то $\delta\boldsymbol{v}_i$ вследствие линейности уравнений (49) будут удовлетворять в свою очередь соответствующим однородным уравнениям

$$B_k(\delta\boldsymbol{v}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{50'}$$

которые будут тождественны с уравнениями (50), если не считать того, что в уравнениях (50′) вместо неизвестных δP_i стоят величины $\delta\boldsymbol{v}_i$.

23. Теорема Робена[1]. Пусть скорости $\boldsymbol{v}_i$ определяют какое-нибудь состояние движения, совместимое со связями (49); введем квадратичную функцию, вообще говоря, неоднородную относительно $\boldsymbol{v}_i$,

$$G = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\left\{\boldsymbol{I}_i - m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i^-)\right\}^2, \tag{51}$$

[1]) Густав Робен (Gustave Robin) родился в Париже в 1855 г., умер там же в 1897 г. Оригинальный и проницательный мыслитель, внес важный вклад по результатам и по методу не только в теорию импульсов, но также и в термодинамику, в электростатику и в критическое направление теории функций. Его сочинения собраны в трех томах (Париж, 1899—1903).

предполагая, что $\boldsymbol{v}_i$ представляют собой какое угодно решение уравнений (49). Полный дифференциал этой функции, так как в ней импульсы $\boldsymbol{I}_i$ и скорости до удара $\boldsymbol{v}_i$ рассматриваются как заданные, определится равенством

$$\delta G = -\sum_{i=1}^{N} \{\boldsymbol{I}_i - m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i^-)\} \cdot \delta \boldsymbol{v}_i; \tag{52}$$

он обратится в нуль, если вместо $\boldsymbol{v}_i$ будут подставлены скорости после удара $\boldsymbol{v}_i^+$, удовлетворяющие не только уравнениям (43), но также и общему уравнению (48).

Это означает, что соответствующее значение G^+ величины G является стационарным. Но легко видеть, что мы имеем здесь дело с минимумом, если раскрыть смысл разности $G - G^+$. Для этой цели будет исходить из тождества

$$\frac{1}{2m_i}\{\boldsymbol{I}_i - m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i^-)\}^2 - \frac{1}{2m_i}\{\boldsymbol{I}_i - m_i(\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i^-)\}^2 =$$

$$= \boldsymbol{I}_i \cdot (\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i) + \frac{1}{2} m_i [(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i^-)^2 - (\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i^-)^2] =$$

$$= (\boldsymbol{I}_i - m_i \Delta \boldsymbol{v}_i) \cdot (\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i) + \frac{1}{2} m_i [2\Delta \boldsymbol{v}_i + 2\boldsymbol{v}_i^- - \boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i] \cdot (\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i) =$$

$$= (\boldsymbol{I}_i - m_i \Delta \boldsymbol{v}_i) \cdot \delta \boldsymbol{v}_i + \frac{1}{2} m_i (\delta \boldsymbol{v}_i)^2,$$

в первой части которого принято обозначение $\delta \boldsymbol{v}_i$ для разности $\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i$. Если просуммируем по индексу i от 1 до N, то левая часть на основании определения (51) функции G даст $G - G^+$, а первый член правой части будет равен нулю в силу заключительного замечания предыдущего пункта. Вследствие этого останется

$$G = G^+ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\delta \boldsymbol{v}_i)^2. \tag{53}$$

Отсюда видно (теорема Робена), что: *неизвестное состояние движения после удара будет таким, для которого функция G имеет наименьшее значение по сравнению со всеми состояниями движения, совместимыми со связями* (49).

24. Сопоставление теоремы Робена с принципом наименьшего принуждения. Прежде чем идти дальше, остановимся немного на функции G предыдущего параграфа и упростим ее выражение путем введения в нее воображаемых скоростей $\boldsymbol{v}_i^*$, которые приняли бы точки P_i системы под действием заданных импульсов, если бы отсутствовали связи. Для таких скоростей имеем

$$m_i(\boldsymbol{v}_i^* - \boldsymbol{v}_i^-) = \boldsymbol{I}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

и, следовательно, функция G принимает вид

$$G=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (v_i^* - v_i)^2.$$

Рассмотрим теперь промежуток времени ε, также очень короткий, следующий за моментом t_0, когда система подверглась действию импульсов, и для любой точки P_i обозначим через Q_i то положение, которое она действительно займет в момент $t_0+\varepsilon$ при каком-нибудь движении, совместимом со связями, существующими в то время, когда действуют удары, а через Q_i^* — положение, которое она приняла бы в тот же самый момент, если бы она двигалась свободно под действием тех же самых импульсов I_i.

Как и в п. 2 предыдущей главы, *принуждение*, происходящее от связей, будет определяться равенством

$$\Gamma=\sum_{i=1}^{N} m_i Q_i Q^{*2};$$

и так как имеем

$$Q_i=P_1+\varepsilon v_i+\ldots, \qquad Q_i^*=P_i+\varepsilon v_i^*+\ldots \qquad (i=1, 2, \ldots, N),$$

где опущенные члены будут относительно ε порядка выше первого, то, пренебрегая членами третьего и более высокого порядка относительно ε, получим

$$\Gamma=2\varepsilon^2 G+\ldots$$

Так как было доказано, что для состояния движения после удара функция G имеет наименьшее значение, то достаточно применить к предыдущему выражению Γ рассуждения, аналогичные рассуждениям п. 3 предыдущей главы, чтобы заключить, что *принцип наименьшего принуждения сохраняет свое значение также и для импульсивного движения.*

25. Следствие из теоремы Робена. Теорема Кельвина. Вернемся к теореме Робена и предположим, в частности, что прямо приложенных импульсов нет, т. е. что явление происходит исключительно от внезапного введения связей (отвердение, закрепление точки или оси, наложение заданных скоростей на некоторые точки и т. д.). Выражение для функции G сведется в этом случае к виду

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (v_i - v_i^-)^2,$$

так что среди всех движений, совместимых со связями, состояние движения после удара будет отличаться тем, что для этого движения

живая сила, происходящая от резких изменений скорости (живая сила приобретенных скоростей) будет иметь наименьшее значение.

Еще более частное, но более наглядное предложение мы имеем в так называемой теореме Кельвина. Мы придем к этой теореме, предполагая, что при отсутствии прямо приложенных импульсов система находится первоначально в покое ($v_i^- = 0$), а вводимые внезапно добавочные связи состоят в наложении на некоторое число точек известных заданных скоростей ($v_i^+ = V_i$), конечно, совместимых с другими связями (49), которые надо учитывать.

В этом случае функция G будет равна живой силе, которую система будет иметь в результате указанного наложения скоростей, и мы приходим таким образом к теореме: *живая сила для действительного состояния движения, следующего за наложением связей, будет наименьшей по сравнению с живой силой во всяком другом состоянии движения, совместимом со связями* (в число которых включены и связи, вызывающие внезапное резкое изменение скоростей).

26. Обратимые связи. Теорема Карно[1]). В более общем предположении линейные уравнения (49) связей не являются однородными; типичный пример этого мы имели в связях, соответствующих наложению скоростей и рассмотренных в теореме Кельвина (предыдущий параграф). Но и в случаях более обыкновенных и, в частности, когда речь идет о голономных или неголономных связях, не зависящих от времени, уравнения (49) не будут иметь правой части, так что вместе со всяким состоянием движения, совместимым с указанными связями, связи допускают и прямо противоположное движение. По этой причине связи, выражаемые линейными и однородными уравнениями, называются *обратимыми*.

Если все связи, которым подчинена система, обратимы, то оправдывается известное обстоятельство, что уравнения (49) будут тождественны, за исключением обозначения неизвестных, с уравнениями (50), так что всякое состояние движения, совместимое со связями, соответствует некоторому виртуальному перемещению и обратно; общее уравнение импульсивного движения можно написать в виде

$$\sum_{i=1}^{N} (I_i - m_i \Delta v_i) \cdot v_i = 0, \tag{48'}$$

---

[1]) Лазарь Карно родился в Нолей (Кот-д'Ор) в 1753 г., умер в Магдебурге в 1823 г. Был организатором войск Французской республики во время Конвента; пользовался большим почетом и занимал высшие должности также и в наполеоновский период; умер в изгнании. Был одним из первых ученых, занимавшихся приложениями механики к машинам, а также проективной геометрией. Широкую известность получили также и его Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal, первое издание которых вышло в 1797 г.

где через v_i обозначены скорости в любом состоянии движения, совместимом со связями.

Если, в частности, мы припишем скоростям v_i значения v_i^+, соответствующие действительному состоянию движения после удара, и, предполагая прямо приложенные импульсы равными нулю, примем во внимание тождество

$$\Delta v_i \cdot v_i^+ = (v_i^+)^2 - v_i^- \cdot v_i^+ = \frac{1}{2}(v_i^+)^2 - \frac{1}{2}(v_i^-)^2 + \frac{1}{2}(\Delta v_i)^2,$$

то из уравнения (48′) получим

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (v_i^+)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (v_i^-)^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i (\Delta v_i)^2,$$

или, обозначая через T живую силу системы и через Θ живую силу, соответствующую внезапным изменениям скоростей,

$$-\Delta T = \Theta.$$

Это равенство выражает следующую теорему Карно (см. п. 6): *для всякой материальной системы, подчиненной связям без трения и обратимым, в которой без наличия прямо приложенных импульсов происходят резкие изменения скоростей, всегда будет иметься общая потеря живой силы, равная живой силе, соответствующей этим изменениям скоростей.*

27. Случай взрыва. В этом случае, по крайней мере, на некоторые материальные элементы системы действуют импульсы внутренней природы, попарно взаимнопротивоположные; эти импульсы вызывают большей частью разрушение элементов, на которые они действуют. Но так как в состоянии движения до взрыва разрушение еще не имело места, то соответствующая работа импульсов

$$\sum_{i=1}^{N} I_i v_i$$

необходимо будет равна нулю, так как она состоит из слагаемых попарно равных по абсолютной величине и с противоположными знаками; может быть, не бесполезно заметить, что того же нельзя сказать об аналогичной работе, соответствующей состоянию последующего движения, так как элементы, разорванные разрушением, к которым будут приложены два любых прямо противоположных импульса, будут (вообще говоря) иметь различные скорости.

Если уравнение (48′) относится к состоянию движения до взрыва, то, полагая в нем $v_i = v_i^-$, мы можем в силу только что сказанного привести его к виду

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \Delta v_i \cdot v_i^- = 0;$$

этому уравнению, посредством преобразования, совершенно аналогичного преобразованию из предыдущего параграфа (за исключением разве замены v_i^+ через v_i^-), можно придать вид

$$\Delta T = \Theta.$$

Поэтому заключаем, что: *в материальной системе с обратимыми связями без трения взрыв производит выигрыш в живой силе, равный живой силе, происходящей от резкого изменения скоростей элементов системы.*

28. Теорема Лагранжа—Бертрана. Закончим эти общие рассуждения одним предложением, которое носит название теоремы Бертрана, хотя в одном частном случае оно было известно еще Лагранжу.

В этой теореме сравнивается живая сила T^+, с которой действительно начинается движение после удара системы с обратимыми связями и при наличии каких угодно активных импульсов, с живой силой T', которую имела бы та же самая система под действием тех же самых импульсов, если бы на нее были внезапно наложены еще новые связи, тоже обратимые, и утверждается, что T^+ будет наибольшей по сравнению со всеми возможными T'.

Для доказательства этой теоремы достаточно снова взять общее уравнение в форме (48′), действительной для систем с обратимыми связями, и применить его сначала к системе, на самом деле заданной, а потом к системе, которая получилась бы после воображаемого наложения новых связей. Обозначая через v_i' скорости после удара в этом втором случае, в силу чего надо положить $\Delta v_i = v_i' - v_i^-$, и отмечая, что в обоих случаях можно принять $v_i = v_i'$, так как состояние движения v_i' наверное будет совместимо как с существовавшими связями, так и с добавочными, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{N} [I_i - m_i (v_i^+ - v_i^-)] \cdot v_i' = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} [I_i - m_i (v_i' - v_i^-)] \cdot v_i' = 0.$$

Вычитая почленно первое равенство из второго и принимая во внимание тождество

$$(v_i^+ - v_i') \cdot v_i' = \frac{1}{2}(v_i^+)^2 - \frac{1}{2}(v_i')^2 - \frac{1}{2}(v_i^+ - v_i')^2,$$

получим уравнение

$$T^+ = T' + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (v_i^+ - v_i')^2,$$

которое показывает, что живая сила будет не больше живой силы T^+ и будет равна ей только в том случае, когда любое состояние движения совместимое со связями, первоначальными и добавочными, совпадает с действительным состоянием движения после удара.

29. Голономные системы. Вернемся к общему уравнению импульсивного движения в его первоначальной форме (48) для того, чтобы приложить его к любой голономной системе, число степеней свободы которой пусть будет n. Естественно, что голономность связей должна существовать и в течение промежутка времени τ, когда действуют ударные силы, так что, если обратимся прямо к обозначениям п. 22, уравнения (49), число r которых надо принять связанным с числом степеней свободы n и числом N точек системы известным соотношением $r+n=3N$, должны получаться при помощи дифференцирования по времени такого же числа соотношений между координатами. Эти соотношения, как мы уже знаем, можно представить себе написанными в виде параметрических выражений

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{54}$$

точек системы в функциях от n лагранжевых независимых параметров и, возможно, времени. В интересующем нас промежутке времени виртуальные перемещения системы будут определяться равенствами

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{55}$$

где δq_h представляют собой n бесконечно малых вполне произвольных приращений.

На основании уравнений (55) для элементарной работы

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{I}_i \cdot \delta P_i, \tag{56}$$

совершаемой прямо приложенными импульсами на любом виртуальном перемещении системы, мы получим выражение

$$\delta L = \sum_{h=1}^{N} J_h \delta q_h, \tag{56'}$$

где положено

$$J_h = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{I}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{57}$$

Эти n скалярных количеств J_h, которые надо считать заданными вместе с активными импульсами и со связями, соответствуют составляющим обыкновенных обобщенных сил по отдельным лагранжевым координатам q_h и потому могут быть названы *лагранжевыми составляющими импульсов* (*обобщенными импульсами*).

Возьмем снова хорошо известные выражения

$$v_i = \frac{\partial P_i}{\partial t} + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \quad (58)$$

которые для скоростей v_i получаются из уравнений (54) и которые можно рассматривать как полученные в результате решения уравнений связей (49).

Наряду с равенствами (58) примем во внимание еще тождества, которые вытекают из них

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Наконец, введем живую силу системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i \cdot v_i,$$

которая, как известно, может быть представлена на основании уравнений (58), как функция второй степени, вообще говоря, неоднородная, от лагранжевых скоростей $\dot{q}$; вспомним далее линейные относительно этих скоростей $\dot{q}$ выражения, которые выводятся для обобщенных количеств движения p_h путем дифференцирования T по времени, и, принимая во внимание указанные выше тождества, напишем

$$p_h = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \quad (59)$$

Заметим теперь, что состояние движения голономной системы будет, конечно, определено в любой момент значениями q и $\dot{q}$, так что задача импульсивного движения в любой момент t_0, поскольку q как параметры положения не испытывают никаких изменений, сводится к определению изменений лагранжевых скоростей $\Delta\dot{q}_h$. Но, если вспомним, что (гл. X, п. 5) обобщенные количества движения (59) суть (линейные) независимые между собой функции от $\dot{q}$ с коэффициентами, зависящими от координат q и, возможно, от времени t и потому имеющими постоянное значение за время удара, то увидим, что достаточно определить изменения обобщенных количеств движения Δp_h, после чего $\Delta\dot{q}_h$ получатся посредством простого решения линейных уравнений.

Эти Δp_h теперь легко найти из общего уравнения импульсивного движения (48). Подставляя в него вместо δP_i их выражения (55), приравнивая нулю коэффициенты при отдельных δq_h и учитывая

уравнения, определяющие лагранжевы составляющие импульсов (57), мы придем к уравнениям

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \Delta v_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = J_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

достаточно применить уравнения (59) последовательно к состоянию движения до и после удара, учитывая неизменяемость q при явлении удара, чтобы в левых частях этих уравнений иметь выражения для Δp_h.

Поэтому будут иметь место уравнения

$$\Delta p_h = J_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

которые в случае голономных систем дают однозначное решение задачи импульсивного движения, уже упоминавшееся в п. 22 [9].

30. Пример. Обратимся снова к двойному маятнику, который был определен и изучен в п. 11 гл. VII, и, сохраняя введенные там обозначения, приложим в произвольный момент t_0 к центру тяжести G_1 главного маятника импульс величиной I, лежащий в (вертикальной) плоскости качаний центров тяжести G, G_1 и направленный перпендикулярно к O_1G_1.

Виртуальная работа δL этого импульса определяется выражением $\boldsymbol{I} \cdot \delta G_1$ и, так как δG_1 имеет одно и то же направление (линию действия) с $\boldsymbol{I}$, то достаточно за положительную сторону на общей линии действия векторов $\boldsymbol{I}$ и δG_1 принять ту сторону, которая соответствует возрастанию угла φ_1; поэтому имеем

$$\delta L = \pm I r_1 \, \delta\varphi_1,$$

где надо взять знак $+$ или $-$ в зависимости от того, стремится ли импульс I в тот момент, когда он действует, увеличить или уменьшить угол φ_1.

Отсюда, вспоминая, что на основании уравнения (56′) предыдущего параграфа, лагранжевы составляющие импульсов будут не чем иным, как коэффициентами при δq_h (в нашем случае при $\delta\varphi$, $\delta\varphi_1$) в выражении виртуальной работы, получим

$$J = 0, \quad J_1 = \pm I r_1,$$

подразумевая при этом, что составляющие J, J_1 относятся соответственно к φ, φ_1.

С другой стороны, из выражения (12), найденного в упомянутом п. 11 гл. VII для живой силы T двойного маятника, принимая также

во внимание равенство (11), в качестве уравнений для определения обобщенных количеств движения получим

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = A\dot{\varphi} + mr\,[r\dot{\varphi} + \lambda\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi - \varphi_1)], \\ p_1 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = A_1\dot{\varphi}_1 + m\lambda\,[\lambda\dot{\varphi}_1 + r\dot{\varphi} \cos(\varphi - \varphi_1)]; \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

уравнения импульсивного движения двойного маятника примут после этого вид

$$\Delta p = 0, \quad \Delta p_1 = \pm I r_1.$$

Подставляя в эти уравнения вместо Δp, Δp_1 их линейные относительно $\Delta\dot{\varphi}$, $\Delta\dot{\varphi}_1$ выражения, которые выводятся из формул (60), можно получить явные выражения для изменений угловых скоростей двух маятников.

Даже не выполняя этого решения, из уравнений (60) можно видеть, что $\Delta\dot{\varphi}$ имеет значение, не равное нулю, хотя импульс приложен к другому маятнику, что, конечно, зависит от наличия связи между маятниками. Далее из $\Delta p = 0$ следует

$$\frac{\Delta\dot{\varphi}}{\Delta\dot{\varphi}_1} = -\frac{mr\lambda \cos(\varphi - \varphi_1)}{A + mr^2},$$

так что действие импульса на второй маятник при прочих равных условиях будет максимальным, когда центры тяжести обоих маятников будут расположены на одной прямой.

31. Замечание о случае односторонней связи. Предположим, наконец, что связи, наложенные на систему, за очень короткий промежуток времени τ, в течение которого прилагаются ударные силы, будут частично односторонними, или, точнее, связи, по отношению к любому состоянию движения, представляются одни r уравнениями вида

$$B_k(\boldsymbol{v}) = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \qquad (49)$$

другие s неравенствами

$$U_j(\boldsymbol{v}) \leqslant c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, s), \qquad (61)$$

где $U_j(\boldsymbol{v})$, так же, как и $B_k(\boldsymbol{v})$, символически означают линейные однородные функции от составляющих скоростей $\boldsymbol{v}_i$, коэффициенты которых, такие как b_k, c_j, зависят от координат и, возможно, еще и времени.

Мы уже знаем, что при наличии односторонних связей непрерывное движение определяется уже не общим уравнением динамики, а соответствующим общим соотношением. Поэтому, поступая с этим соотношением так же, как в п. 22 с общим уравнением, и переходя

к пределу при τ, стремящемся к нулю, придем к *общему соотношению импульсивного движения.*

$$\sum_{i=1}^{N} (I_i - m_i \Delta v_i) \cdot \delta P_i \leqslant 0. \tag{62}$$

Задача об импульсивном движении состоит и здесь в определении состояния движения после удара, если известны прямо приложенные импульсы и состояние движения до удара. Но условия (49), (61), (62) сами по себе не являются еще достаточными для определения скоростей v_i^+. Для этой цели необходимо ввести некоторое дальнейшее условие, которое должно быть получено в любом случае или из физической природы вопроса, или же из некоторого критерия общего характера.

Такой критерий был действительно сформулирован А. Майером[1]) после переписки с Е. Стюди (неизданной). Здесь мы дадим о нем краткое понятие.

В случае исключительно двусторонних связей в п. 23 мы видели, что общее уравнение импульсивного движения (48), в котором приняты во внимание заранее заданные связи (49), равносильно условию минимума, совместимому со связями, для функции G Робена. Если обратим внимание на интерпретацию этого свойства как выражающего принцип *наименьшего принуждения* (п. 24), то естественно ожидать, что тот же самый принцип минимума, совместимый со связями, для функции G справедлив и для задачи импульсивного движения также и в более общем случае, когда система имеет, помимо двусторонних связей (49), еще и односторонние связи (61). Не рассматривая вопроса во всей его общности, Майер показал, что в более простых случаях указанный принцип не только влечет за собой общее соотношение (62), но содержит и другие условия, позволяющие однозначно определить состояние движения после удара.

Мы не будем здесь развивать дальше соображений Майера. Точно так же, не излагая, мы ограничимся лишь напоминанием, что Альманси[2]), рассматривая, в частности, случай однородных связей ($b_k = c_j = 0$), вывел различные важные свойства импульсивного движения из одного только символического соотношения (62), независимо от всяких дальнейших предположений.

§ 6. Теорема Вольтерра

32. Закончим изложением одного существенного с математической точки зрения дополнения, которое можно внести в теорию импульсивного движения в случае систем со связями, для которых имеет

---

[1]) A. Mayer, Zur Regulirung der Stösse и т. д., Leipzig. Berichte, 1899, стр. 245—264.

[2]) Almansi, Sulla teoria degli impulsi, *Rend., Lincei*, сер. 5^a, т. 25, 1916$_2$; стр. 410—416.