к пределу при τ, стремящемся к нулю, придем к *общему соотношению импульсивного движения.*

$$\sum_{i=1}^{N} (I_i - m_i \Delta v_i) \cdot \delta P_i \leqslant 0. \tag{62}$$

Задача об импульсивном движении состоит и здесь в определении состояния движения после удара, если известны прямо приложенные импульсы и состояние движения до удара. Но условия (49), (61), (62) сами по себе не являются еще достаточными для определения скоростей v_i^+. Для этой цели необходимо ввести некоторое дальнейшее условие, которое должно быть получено в любом случае или из физической природы вопроса, или же из некоторого критерия общего характера.

Такой критерий был действительно сформулирован А. Майером[1]) после переписки с Е. Стюди (неизданной). Здесь мы дадим о нем краткое понятие.

В случае исключительно двусторонних связей в п. 23 мы видели, что общее уравнение импульсивного движения (48), в котором приняты во внимание заранее заданные связи (49), равносильно условию минимума, совместимому со связями, для функции G Робена. Если обратим внимание на интерпретацию этого свойства как выражающего принцип *наименьшего принуждения* (п. 24), то естественно ожидать, что тот же самый принцип минимума, совместимый со связями, для функции G справедлив и для задачи импульсивного движения также и в более общем случае, когда система имеет, помимо двусторонних связей (49), еще и односторонние связи (61). Не рассматривая вопроса во всей его общности, Майер показал, что в более простых случаях указанный принцип не только влечет за собой общее соотношение (62), но содержит и другие условия, позволяющие однозначно определить состояние движения после удара.

Мы не будем здесь развивать дальше соображений Майера. Точно так же, не излагая, мы ограничимся лишь напоминанием, что Альманси[2]), рассматривая, в частности, случай однородных связей ($b_k = c_j = 0$), вывел различные важные свойства импульсивного движения из одного только символического соотношения (62), независимо от всяких дальнейших предположений.

§ 6. Теорема Вольтерра

32. Закончим изложением одного существенного с математической точки зрения дополнения, которое можно внести в теорию импульсивного движения в случае систем со связями, для которых имеет

---

[1]) A. Mayer, Zur Regulirung der Stösse и т. д., Leipzig. Berichte, 1899, стр. 245—264.

[2]) Almansi, Sulla teoria degli impulsi, *Rend., Lincei*, сер. 5^a, т. 25, 1916$_2$; стр. 410—416.

место теорема живых сил. Речь идет о той теореме Вольтерра, которую мы уже упоминали в п. 1 этой главы [1]).

Обозначив, как обычно, через F_i силу, прямо приложенную к любой точке $P_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ заданной материальной системы S, предположим, что связи (как это бывает, когда речь идет о связях без трения и не зависящих от времени) таковы, что имеет место теорема живых сил

$$dT = dL, \tag{63}$$

где dL обозначает работу, совершенную за элемент времени dt только активными силами (гл. V, п. 30), т. е.

$$dL = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot dP_i.$$

Рассматривая лишь очень короткий промежуток времени от t_0 до $t_0 + \tau$, в течение которого некоторые или даже все силы F_i имеют характер ударных сил, обозначим через

$$I_i = \lim_{\tau \to 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F_i dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{64}$$

соответствующие импульсы. Помимо существования этих пределов, допустим, что во всякий момент t, заключенный между t_0 и $t_0 + \tau$, даже при стремлении τ к нулю, остаются конечными интегралы

$$\int_{t_0}^{t} F_i dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{65}$$

Следует заметить, что это обстоятельство будет наверное вытекать, как необходимое следствие, из предположения существования пределов (64) всякий раз, когда ударные силы F_i при стремлении τ к нулю неограниченно возрастают без колебаний, т. е. в конце концов при τ, достаточно малом, образуют со всяким неизменным направлением всегда острые или всегда тупые углы (включая в обоих случаях предельный случай прямого угла). Удары, удовлетворяющие этому дополнительному условию, мы будем называть *неколебательными*.

Из допущенного предположения следует существование некоторого конечного и определенного числа C такого, что в любой момент t между t_0 и $t_0 + \tau$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t} F_i dt < C. \tag{66}$$

[1]) Рассуждения, которые мы здесь воспроизводим, были изложены Вольтерра в его Lezioni di Meccanica razionale, читанных в Пизанском университете (1893), которые были изданы только в литографированном виде.

Заметив это, проинтегрируем уравнение (63) от t_0 до t, после чего получим

$$T - T_0 = L, \tag{63'}$$

где

$$L = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t} F_i \cdot dP_i = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t} F_i \cdot v_i \, dt, \tag{67}$$

и обозначим через Λ максимум абсолютной величины, достигаемой функцией L при изменении t от t_0 до $t_0 + \tau$.

Этот максимум Λ на основании наших предположений есть некоторая функция от τ, необходимо конечная, пока τ остается отличным от нуля; покажем прежде всего, что эта функция остается меньше некоторого *постоянного* количества, а потому остается конечной и тогда, когда τ стремится к нулю.

Из уравнения (63) мы имеем

$$T \leqslant T_0 + \Lambda,$$

и так как живая сила T определяется из соотношения

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2,$$

то и каждое из составляющих ее существенно положительных слагаемых $m_i v_i^2/2$ будет оставаться меньше, чем $T_0 + \Lambda$.

Поэтому для каждой точки P_i будем иметь

$$v_i \leqslant \sqrt{\frac{2(T_0 + \Lambda)}{m_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

и, следовательно, обозначая через m полную массу системы, и подавно

$$v_i \leqslant \sqrt{\frac{2(T_0 + \Lambda)}{m}}. \tag{68}$$

Теперь из выражения (67) для L, замечая, что абсолютная величина скалярного произведения двух векторов всегда меньше или, самое большее, равна произведению абсолютных величин сомножителей, тотчас же выводим

$$|L| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t} F_i v_i \, dt$$

и, следовательно, в силу соотношений (66), (68),

$$|L| \leqslant C \sqrt{\frac{2(T_0 + \Lambda)}{m}}.$$

Это неравенство справедливо для всякого момента, заключенного между t_0 и $t_0+\tau$, а потому, в частности, и тогда, когда $|L|$ достигает своего максимального значения Δ; отсюда имеем

$$\Delta \leqslant C\sqrt{\frac{2(T_0+\Delta)}{m}}$$

или же

$$\frac{\Delta^2}{T_0+\Delta} \leqslant \frac{2C^2}{m}.$$

Если к обеим частям этого соотношения прибавим по $2T_0$ и заметим, что количество, которое таким образом получится в левой части, т. е.

$$\frac{\Delta^2+2T_0(\Delta+T_0)}{\Delta+T_0}=\frac{(\Delta+T_0)^2+T_0^2}{\Delta+T_0},$$

будет больше, чем $\Delta+T_0$, то придем к соотношению

$$\Delta+T_0 \leqslant \frac{2C^2}{m}+2T_0, \tag{69}$$

или к соотношению

$$\Delta \leqslant \frac{2C^2}{m}+T_0, \tag{69'}$$

которое показывает, что при каком угодно значении τ (лишь бы, конечно, оно было достаточно мало) Δ остается меньше некоторой постоянной величины.

С другой стороны, соотношение (69) позволяет подставить вместо (68) соотношение

$$v_i \leqslant \frac{2}{m}\sqrt{mT_0+C^2}, \tag{70}$$

и если обозначим через ΔP_i перемещение, которое испытывает точка P_i от момента t_0 до момента t между t_0 и $t_0+\tau$, т. е. если положим

$$\Delta P_i=\int_{t_0}^{t} v_i\,dt \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

и обозначим через s_i верхний предел длины этого перемещения ΔP_i при изменении t от t_0 до $t_0+\tau$, то будем иметь

$$s_i \leqslant \int_{t_0}^{t_0+\tau} v_i\,dt \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

и, следовательно, на основании уравнений (70)

$$s_i \leqslant \frac{2\tau}{m}\sqrt{mT_0+C^2} \quad (i=1, 2, \ldots, N). \tag{71}$$

Мы видим, таким образом, что s_i стремятся к нулю вместе с τ.

Собирая в одну общую формулировку результаты, последовательно полученные в предыдущих рассуждениях, мы придем к упомянутой выше теореме:

Если на материальную систему наложены такие связи, что имеет место теорема живых сил, и если в течение чрезвычайно короткого промежутка времени τ система находится под действием ударных (неколебательных) сил, то при $\tau \to 0$:

а) *работа сил остается меньшей некоторой конечной величины* [соотношение (69′)];

б) *скорости точек системы остаются также меньшими некоторых конечных величин* [соотношения (70)];

в) *перемещения, испытываемые отдельными точками системы, стремятся к нулю вместе с τ* [соотношения (71)].

В пределе можно сказать, что *под действием какого угодно числа прямо приложенных импульсов конфигурация системы остается неизменной, тогда как для скоростей отдельных точек, вообще говоря, возможны резкие изменения.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Из формул (12) п. 4, относящихся к прямому центральному удару, непосредственно следует, что для того, чтобы одно из двух тел, например S_2, после удара остановилось ($v_2^+ = 0$), необходимо и достаточно, чтобы между массами, скоростями до удара и коэффициентом восстановления имело место соотношение

$$(1+e)\, m_1 v_1^- + (m_2 - e m_1)\, v_2^- = 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что:

а) если до удара тело S_1 было в покое, то отношение m_2/m_1 должно быть равно коэффициенту восстановления;

б) если до удара скорости двух тел были прямо противоположны, то отношение m_2/m_1 должно быть равно $1+2e$ и, следовательно, в идеальном случае совершенно упругих тел, должно быть равно 3.

2. Для того чтобы при центральном и прямом ударе скорость после удара одного из двух тел, например S_2, была прямо противоположна скорости до удара, необходимо и достаточно, чтобы отношение v_2^-/v_1^- скоростей до удара равнялось

$$-\frac{(1+e)\, m_1}{2m_2 + (1-e)\, m_1}.$$

3. Проверить, что при центральном и прямом ударе скорости обоих тел могут обратиться, сохраняя каждая собственную абсолютную величину, только в том случае, когда скорость центра тяжести равна нулю, и подтвердить, что, за исключением, конечно, случая покоя, необходимо и достаточно выполнение дальнейшего условия $e = 1$.

4. Имеются три шара S_1, S_2, S_3 с центрами на одной прямой; первый из них движется, остальные два неподвижны. Происходит центральный и прямой удар сначала между S_1 и S_2, затем между S_2 и S_3. Для того чтобы