Мы видим, таким образом, что s_i стремятся к нулю вместе с τ.

Собирая в одну общую формулировку результаты, последовательно полученные в предыдущих рассуждениях, мы придем к упомянутой выше теореме:

Если на материальную систему наложены такие связи, что имеет место теорема живых сил, и если в течение чрезвычайно короткого промежутка времени τ система находится под действием ударных (неколебательных) сил, то при $\tau \to 0$:

а) *работа сил остается меньшей некоторой конечной величины* [соотношение (69′)];

б) *скорости точек системы остаются также меньшими некоторых конечных величин* [соотношения (70)];

в) *перемещения, испытываемые отдельными точками системы, стремятся к нулю вместе с τ* [соотношения (71)].

В пределе можно сказать, что *под действием какого угодно числа прямо приложенных импульсов конфигурация системы остается неизменной, тогда как для скоростей отдельных точек, вообще говоря, возможны резкие изменения.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Из формул (12) п. 4, относящихся к прямому центральному удару, непосредственно следует, что для того, чтобы одно из двух тел, например S_2, после удара остановилось ($v_2^+ = 0$), необходимо и достаточно, чтобы между массами, скоростями до удара и коэффициентом восстановления имело место соотношение

$$(1+e)\, m_1 v_1^- + (m_2 - e m_1)\, v_2^- = 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что:

а) если до удара тело S_1 было в покое, то отношение m_2/m_1 должно быть равно коэффициенту восстановления;

б) если до удара скорости двух тел были прямо противоположны, то отношение m_2/m_1 должно быть равно $1+2e$ и, следовательно, в идеальном случае совершенно упругих тел, должно быть равно 3.

2. Для того чтобы при центральном и прямом ударе скорость после удара одного из двух тел, например S_2, была прямо противоположна скорости до удара, необходимо и достаточно, чтобы отношение v_2^-/v_1^- скоростей до удара равнялось

$$-\frac{(1+e)\, m_1}{2m_2 + (1-e)\, m_1}.$$

3. Проверить, что при центральном и прямом ударе скорости обоих тел могут обратиться, сохраняя каждая собственную абсолютную величину, только в том случае, когда скорость центра тяжести равна нулю, и подтвердить, что, за исключением, конечно, случая покоя, необходимо и достаточно выполнение дальнейшего условия $e = 1$.

4. Имеются три шара S_1, S_2, S_3 с центрами на одной прямой; первый из них движется, остальные два неподвижны. Происходит центральный и прямой удар сначала между S_1 и S_2, затем между S_2 и S_3. Для того чтобы

для некоторой заданной скорости до удара шара S_1 и при заданных массах шаров S_1 и S_3 получилась максимальная скорость шара S_3, необходимо и достаточно, чтобы масса шара S_2 была средней геометрической между массами шаров S_1 и S_3 (Гюйгенс).

5. Шар наталкивается на другой шар с двойной массой, находящийся в покое. Проверить, что если $e = 1/2$, то кинетическая энергия системы после удара сведется к половине.

6. Порядок величины продолжительности удара. Для того чтобы иметь понятие об этой продолжительности, рассмотрим один частный случай (центрального и прямого удара), в котором сложные явления деформации и последующего восстановления, на которые мы указывали в п. 4, можно схематически представить элементарным путем.

Рассмотрим горизонтальную платформу, поддерживаемую снизу мощной пружиной с вертикальной осью, и пустим падать на нее с некоторой высоты большой груз с массой m. Этот груз после падения будет находиться под действием силы тяжести и под противоположным действием пружины, имеющим характер восстанавливающей силы, направленной к естественному положению платформы, а также под действием совокупности пассивных сопротивлений. Если отвлечемся от этих последних и обозначим через z высоту по вертикали платформы, измеряемую вниз от естественного положения, то уравнением движения, очевидно, будет

$$m\ddot{z} = mg - \lambda z,$$

где λ — положительный коэффициент (ср. гл. I, п. 18), который мы примем в форме $\lambda = m\omega^2$. Это уравнение, как мы уже знаем, определяет гармоническое колебание около положения равновесия $z = g/\omega^2$, тогда как в действительности, если речь идет об ударе между двумя телами, за первой фазой сжатия последует одна единственная фаза восстановления. Если ограничиться только этими двумя фазами, то явление удара можно уподобить колебаниям тела и платформы. Мы получим, таким образом, способ для оценки как продолжительности удара, так и величины сжатия.

Для этой цели рассмотрим общий интеграл полученного выше уравнения, который, как известно, определяется равенством

$$z = \frac{g}{\omega^2} + r\cos(\omega t + \theta_0),$$

где $r > 0$ и θ_0 суть постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий; заметим, что если v_0 есть скорость, с которой груз ударяется о платформу, то в первый момент $t = 0$ удара должно быть $z = 0$, $\dot{z} = v_0$ или

$$\frac{g}{\omega^2} = -r\cos\theta_0, \quad v_0 = -r\omega\sin\theta_0. \tag{1}$$

Согласно установленной выше схеме продолжительность τ удара соответствует полупериоду гармонического колебания, т. е. величине π/ω, а взаимное проникновение двух тел соответствует наибольшему опусканию платформы

$$\frac{g}{\omega^2} + r.$$

Теперь важно отметить, что величина g/ω^2 есть высота, на которую опустилась бы платформа, если бы груз был положен на нее без удара,

и потому представляет собой величину, которая может быть непосредственно измерена. Обозначая ее через δ, мы будем иметь $\omega = \sqrt{g/\delta}$ и, следовательно,

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{\delta}{g}}.$$

Если предположим δ равным небольшому числу миллиметров, то τ будет порядка немногих сотых долей секунды.

Что же касается величины r, которая на основании выражения $\delta + r$ измеряет динамический эффект, происходящий от удара, то в силу равенств (1) имеем

$$r = \sqrt{\delta^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \delta \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g\delta}};$$

таким образом выявлено влияние скорости v_0 груза.

7. Периодически повторяющиеся импульсы. Случай часов. Вынужденные (малые) колебания системы с одной степенью свободы определяются (гл. I, п. 59, и гл. IV, пример 19) уравнением вида

$$\ddot{s} + 2h\dot{s} + (\omega^2 + h^2)\, s = Q(t),$$

где h есть постоянная затухания, $T = 2\pi/\omega$ — период собственных колебаний, и $Q(t)$ — добавочная сила.

Как мы уже знаем, общее решение однородного уравнения можно написать в виде (гл. I, п. 60)

$$\sigma(t) = re^{-ht} \cos(\omega t + \theta_0) \qquad (r,\ \theta_0 \text{ постоянные});$$

оно стремится к нулю при $t \to \infty$. Обозначим через σ_1 то частное решение σ, которое соответствует $r = 1/\omega$, $\theta_0 = -\pi/2$:

$$\sigma_1(t) = \frac{1}{\omega} e^{-ht} \sin \omega t;$$

оно отвечает, следовательно, начальным условиям

$$\sigma_1(0) = 0, \quad \dot{\sigma}_1(0) = 1.$$

Из анализа известно и к тому же можно проверить непосредственно, что общее решение полного уравнения [т. е. уравнения с правой частью $Q(t)$ ($Q(t)$ — произвольная функция от t)] можно представить в виде

$$s(t) = \sigma(t) + J(t),$$

где

$$J(t) = \int_{t_0}^{t} Q(u)\, \sigma_1(t-u)\, du.$$

В цитированной гл. I (пп. 62 и 66) было отмечено, что если сила $Q(t)$ является периодической с каким-нибудь периодом T_1 (не обязательно совпадающим с T), то в конце концов вынужденные колебания системы будут иметь в качестве периода период возмущающей силы. Это происходит потому, что из двух слагаемых $\sigma(t)$ и $J(t)$, составляющих в сумме $s(t)$, первое стремится к нулю при бесконечном возрастании t, а второе является строго периодическим. Понятно, что аналогичное поведение будет иметь место, по крайней мере приближенно, также и в предельном случае, когда сила $Q(t)$, хотя и остается периодической, но от времени до времени становится очень большой, т. е. переходит в класс ударных сил. Мы будем предполагать, что

сила $Q(t)$ почти все время равна нулю, и, наоборот, становится очень значительной в течение очень коротких промежутков времени τ, следующих друг за другом с периодом T_1, начиная с момента t_0.

Такой тип периодически повторяющихся импульсивных действий имеет большое значение в часовом деле, где посредством ходовых колес или других приспособлений как раз осуществляются повторные удары для поддержания и регулирования движения, которое иначе прекратилось бы вследствие пассивных сопротивлений [1]).

Обозначим через I импульс, соответствующий первому удару,

$$I = \lim_{\tau \to 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} Q(u)\, du.$$

В силу предположенной периодичности ударов, равным образом будет

$$I = \lim_{\tau \to 0} \int_{t_0+(\nu-1)T_1}^{t_0+\nu T_1+\tau} Q(u)\, du \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots,).$$

Если мы примем во внимание, что за очень короткие интервалы τ функцию (непрерывную) $\sigma_1(t-u)$ можно рассматривать приблизительно как постоянную (со значением, которое она имела к началу интервала), то предыдущее выражение J при переходе к пределу при $\tau \to 0$ будет иметь вид

$$J(t) = I \sum_{\nu} \sigma_1(t - t_0 - \nu T_1);$$

здесь сумма распространяется на все целые значения ν (от нуля и далее), которые соответствуют моментам (приложения импульсов) $t_0 + \nu T_1$, принадлежащим интервалу (t_0, t).

Полагая

$$\frac{t-t_0}{T_1} = n + \theta$$

при целом n и θ, заключенном между 0 и 1 $(0 \leqslant \theta < 1)$, мы должны распространить указанную выше сумму на значения индекса ν от 0 до n.

Аргумент функции σ_1, если подставим $(n+\theta)\,T_1$ вместо $t-t_0$, примет вид $\theta T_1 + (n-\nu)\,T_1$, после чего, вводя в виде индекса суммирования $i = n - \nu$ вместо ν, мы можем представить выражение J в виде

$$J(t) = I \sum_{i=0}^{n} \sigma_1(\theta T_1 + i T_1).$$

Если заменим t на $t + T_1$, то целое число n увеличится на единицу, а θ останется неизменным.

Следовательно, будем иметь

$$J(t+T_1) - J(t) = I\sigma_1[\theta T_1 + (n+1)\,T_1] = I\sigma_1(t - t_0 + T_1).$$

Если теперь вспомним, что $\sigma_1(t)$ (как и всякий другой интеграл однородного уравнения) стремится к нулю, когда его аргумент неопределенно

---

[1]) См., например, E. Garuffa, Orologeria moderna, 3-е изд., Милан, 1920, или: J. Andrade, Chronométrie, Paris, 1908; Horlogerie et chronométrie, Paris, 1924; H. Bouasse, сочинение, цитированное на стр. 20; J. et H. Grossman, Horlogerie théorique (два тома), Paris, 1911—1912.

возрастает, то увидим, что правая часть только что написанного уравнения будет приближенно равна нулю при достаточно большом t, т. е. функция $J(t)$ будет приближенно периодической и с тем большим приближением, чем больше будет t.

8. Если, обозначая, как обычно, через $\boldsymbol{Q}$ результирующую, через $\boldsymbol{K}$ — результирующий момент количеств движения твердого тела, мы имеем $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{K}=0$ при $\boldsymbol{Q}\neq 0$, то можно мгновенно остановить твердое тело, сообщив ему единственный импульс. Какова будет его величина и линия действия b?

Предположить, в частности, что движение до удара твердого тела было вращением вокруг некоторой оси a, в силу чего $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}_0=0$.

Линия действия единственного импульса, способного остановить тело в этом случае, совпадает с *осью удара* (пп. 12 и 15) относительно оси a. Изящное систематическое исследование о распределении осей a и b и о соотношении между ними было выполнено (в 1881 г.) Бельтрами, (B. Beltrami, Sulla teoria degli assi di rotazione, сочинения, т. III, стр. 323—344).

9. Если у свободного твердого тела, находящегося в каком-нибудь движении, внезапно остановить одну точку O, то последующее движение может быть только вращением вокруг O, так что скорости отдельных точек должны, вообще говоря, испытать резкие изменения. С точки зрения теории движения под действием мгновенных сил важно представлять явление, как происходящее от одного-единственного импульса, приложенного в точке O. Прямой способ для определения угловых скоростей после удара будет состоять в приравнивании результирующих моментов количеств движения до удара и после удара, взятых относительно точки O. Предоставляя читателю идти этим путем, укажем здесь другой путь, который, может быть, более удобен, когда представляет интерес определить также и импульс $\boldsymbol{I}$, а с другой стороны, желательно ввести только характеристики, относящиеся к центру тяжести (массу и кинематические характеристики). Если мы введем этот неизвестный импульс $\boldsymbol{I}$ в виде вспомогательного элемента, то легко видеть, что состояние движения после удара можно определить, присоединяя к основным уравнениям кинематическое условие, что скорость точки O после удара равна нулю, и применяя при этом обозначения п. 8; мы будем иметь тогда

$$m\,\Delta\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{I},\qquad \Delta\boldsymbol{K}=\overrightarrow{GO}\cdot\boldsymbol{I},$$

а кинематическому условию $\boldsymbol{V}^+=0$, выражая $\boldsymbol{V}^+$ посредством основной формулы кинематики неизменяемых систем, можно придать вид

$$\Delta\boldsymbol{v}_0=-\boldsymbol{v}_0^--\boldsymbol{\omega}^+\cdot\overrightarrow{GO}.$$

Исключая $\boldsymbol{I}$ и $\Delta\boldsymbol{v}_0$ из трех полученных таким образом уравнений, мы придем к равенству

$$\Delta\boldsymbol{K}+m\overrightarrow{GO}\cdot[\boldsymbol{v}_0^-+\boldsymbol{\omega}^+\cdot\overrightarrow{CO}]=0.$$

Если вместо $\boldsymbol{K}$ подставить его выражение $\sigma(\boldsymbol{\omega})$ посредством гомографии инерции относительно центра тяжести и применить формулу двойного векторного произведения, то это равенство примет вид

$$\sigma(\Delta\boldsymbol{\omega})+m\overrightarrow{GO}\cdot\boldsymbol{v}_0^-+$$
$$+m\overrightarrow{GO}^2\boldsymbol{\omega}^+-m\,[\overrightarrow{GO}\cdot\boldsymbol{\omega}^+]\,\overrightarrow{GO}=0; \tag{2}$$

это уравнение однозначно определяет вектор $\boldsymbol{\omega}^+$ на основании данных задачи.

К одному интересному следствию мы придем, предполагая, что состояние движения до удара представляет собой вращение вокруг перманентной оси,

проходящей через центр тяжести тела (гл. VIII, п. 12) и что точка O принадлежит соответствующей главной плоскости, перпендикулярной к оси, или, другими словами, что вектор $\overrightarrow{GO}$ перпендикулярен к $\boldsymbol{\omega}^-$.

В этом случае оправдывается известное положение, что новая ось вращения будет параллельна первоначальной, т. е. вектору $\boldsymbol{\omega}^-$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что если $\boldsymbol{k}$ есть единичный вектор, направленный по вектору $\boldsymbol{\omega}^-$, то уравнение (2), если положить $\boldsymbol{\omega}^+ = r\boldsymbol{k}$, сведется к скалярному уравнению, пригодному для определения неизвестной проекции r вектора $\boldsymbol{\omega}^+$ на направление единичного вектора $\boldsymbol{k}$ (т. е. на направление $\boldsymbol{\omega}^-$). Действительно, если C есть главный центральный момент инерции относительно первоначальной перманентной оси вращения, то имеем $\sigma(\Delta\boldsymbol{\omega}) = C(r - \omega^-)\boldsymbol{k}$, а так как, по предположению, $\boldsymbol{v}_0^- = 0$, $\overrightarrow{GO}\cdot\boldsymbol{\omega}^+ = 0$, то уравнение (2) приводится к виду

$$[C(r - \omega^-) + mr\,GO^2]\,\boldsymbol{k} = 0,$$

откуда

$$r = \frac{C\omega^-}{C + m\,GO^2}.$$

10. Свободная однородная квадратная пластинка равномерно вращается вокруг своей диагонали AC. Показать, что если внезапно закрепить одну из двух других ее вершин B или D, то пластинка (ср. предыдущее упражнение) начнет вращаться вокруг оси, параллельной первоначальной и проходящей через эту вершину, с угловой скоростью, равной одной седьмой части угловой скорости до удара.

11. Применить уравнения п. 10 к однородному стержню OA длины l и массы m ($C = ml^2/12$), к которому в точке A приложен импульс $\boldsymbol{I}$, перпендикулярный к OA, и проверить, что сама точка A испытывает изменение скорости, геометрически равное $4\boldsymbol{I}/m$. Найти для стержня положение центра удара (ср. пп. 14, 15).

12. В свободном твердом теле, находящемся в каком-нибудь движении внезапно закрепляется ось a (приспособлениями, уточнять которые здесь нет необходимости, потому что их можно заменить импульсами, приложенными в точках оси a). Для того чтобы найти угловую скорость ω^+ вращения вокруг оси a после удара (на оси нужно выбрать по желанию положительное направление), достаточно выразить, что момент количеств движения твердого тела относительно этой оси не изменяется. До удара он имеет величину

$$\mu_a = \{\boldsymbol{K} + \overrightarrow{GP} \times \boldsymbol{Q}\}\cdot\boldsymbol{u},$$

где через $\boldsymbol{u}$ обозначен единичный вектор оси a, через P — произвольная точка этой прямой, через $\boldsymbol{Q}$ — результирующая и через $\boldsymbol{K}$ — результирующий момент количеств движения относительно центра тяжести G до удара. Имеем, следовательно,

$$\omega^+ = \frac{\mu_a}{\mathfrak{J}},$$

где $\mathfrak{J}$ есть момент инерции твердого тела относительно оси a, т. е.

$$\mathfrak{J} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + [\overrightarrow{GP}\times\boldsymbol{u}]^2;$$

здесь A, B, C и α, β, γ (направляющие косинусы $\boldsymbol{u}$) относятся к главным центральным осям инерции,

13. Твердое тело вращается вокруг некоторой точки O. В некоторый заданный момент, когда угловая скорость твердого тела равна ω^-, внезапно закрепляется некоторая прямая тела, проходящая через O (посредством импульсов, приложенных в одной или нескольких точках этой прямой), в силу чего, естественно, движение после удара сведется к вращению вокруг оси a. Проверить, что угловая скорость около оси a, ориентированной в произвольную сторону, будет

$$\frac{A\alpha p^- + B\beta q^- + C\gamma r^-}{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2},$$

где A, B, C суть главные моменты инерции, относящиеся к точке O, закрепленной с самого начала, p^-, q^-, r^- — проекции вектора ω^- на главные оси инерции $Oxyz$ и α, β, γ — направляющие косинусы прямой a, ориентированной наперед выбранным способом.

14. Рассмотреть однородную колонну, призматическую или в пределе цилиндрическую, просто опертую на горизонтальный пол.

Пусть t есть сторона основания, или касательная, δ — радиус инерции относительно t. Обозначим еще через a высоту колонны и, следовательно, через $a/2$ высоту центра тяжести G, через φ_0 угол (необходимо острый), который образует перпендикуляр GO, опущенный из G на t, с вертикалью, направленной вниз.

Центр удара колонны относительно оси t, поскольку эта ось (например, при возможном опрокидывании) служит осью вращения, находится на прямой OG на высоте h_1 от пола, определяемой (п. 15) равенством

$$\frac{h_1}{\cos\varphi_0} = \frac{\delta^2}{a/(2\cos\varphi_0)},$$

откуда

$$h_1 = 2\cos^2\varphi_0 \frac{\delta^2}{a}.$$

Для колонны с прямоугольным основанием, у которого длина стороны перпендикулярной к t, есть b, имеем (т. I, гл. X, пп. 21 и 29)

$$\delta^2 = \frac{a^2+b^2}{12} + \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{3},$$

а также $\operatorname{tg}\varphi_0 = b/a$, следовательно,

$$h_1 = \frac{2}{3}a.$$

Для колонны с круговым основанием и с радиусом основания R тотчас же находим

$$\delta^2 = \frac{5}{4}R^2 + \frac{1}{3}a^2,$$

и, очевидно, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 2R/a$.

Отсюда следует

$$h_1 = \frac{2}{3}a\left(1 - \frac{1}{4 + a^2/R^2}\right);$$

из этого равенства видно, что высота h_1 центра удара остается заключенной между $a/2$ и $2a/3$; ее отношение к a будет возрастать вместе с a/R.

15. Дана колонна, как в предыдущем упражнении. Определить величину I наименьшего импульса, приложенного на некоторой заданной высоте h, перпендикулярно к t, которым можно было бы опрокинуть колонну,

Заметим прежде всего, что угловая скорость ω около оси t, сообщаемая импульсом твердому телу, определяется соотношением (п. 14)

$$m\delta^2\omega = hI,$$

где m — масса колонны.

После действия импульса колонна начнет вращаться вокруг t, и, если отвлечемся от трения, движение определится (гл. VII, п. 6 и гл. I, п. 35) из уравнения живых сил (деленного на m)

$$\frac{1}{2}\,\delta^2\dot{\varphi}^2 + gr\cos\varphi = \text{const} = \frac{1}{2}\,\delta^2\omega^2 + gr\cos\varphi_0,$$

где φ_0 имеет то же значение, что и в предыдущем упражнении,

$$r = GO = a/2\cos\varphi_0,$$

а величина φ представляет собой угол, который (при любом наклонном положении колонны) прямая GO образует с нисходящей вертикалью.

Для того чтобы вращательное движение, начавшееся под действием импульса, привело к опрокидыванию колонны, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы центр тяжести G перешел наиболее высокое положение, или чтобы угловая скорость $\dot{\varphi}$ не исчезла в интервале $(\varphi_0, 0)$ угла φ. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было $\dot{\varphi}^2 > 0$ при $\varphi = 0$, или чтобы

$$\delta^2\omega^2 - 2gr(1 - \cos\varphi_0) > 0.$$

Принимая во внимание предыдущее выражение ω, получить из него для минимального импульса I предельное значение

$$\left(\frac{I}{m}\right)^2 = \frac{2gr(1 - \cos\varphi_0)\,\delta^2}{h^2},$$

где (повторим это) h есть высота линии действия импульса и $r = GO = a/(2\cos\varphi_0)$ причем a есть высота колонны.

Для колонны с квадратным основанием при

$$\delta^2 = \frac{a^2 + b^2}{3} \text{ и } b = a\,\mathrm{tg}\,\varphi_0,$$

(см. предыдущее упражнение) будем иметь

$$\left(\frac{I}{m}\right)^2 = \frac{ga^2}{3h^2}\,\frac{1 - \cos\varphi_0}{\cos^3\varphi_0},$$

где, естественно, должно быть положено $h = a/2$, если импульс действует на высоте центра тяжести.

Вообще заметим, что I/m имеет размерность скорости v. Установить, что v можно истолковывать как скорость, которая была бы приобретена точками колонны, расположенными на расстоянии δ^2/h от оси t, если бы колонна, вращаясь вокруг оси t из состояния покоя при наибольшей высоте центра тяжести ($\varphi = 0$), упала на пол ($\varphi = \varphi_0$). Такое истолкование, очевидно, не особенно наглядно. Более интересным будет истолкование, которое можно дать величине I/m в частном случае, когда импульс приложен по оси удара. В этом случае (п. 15) вдоль оси t реактивных импульсов не будет и можно в виде единственного внешнего импульса рассматривать прямо приложенный импульс. Тогда в силу первого основного уравнения I/m будет скоростью v_0, внезапно приданной центру тяжести. С другой стороны, при расстоянии $h/\cos\varphi_0$ центра удара от O будем иметь $h = \delta^2/r\cos\varphi_0$, а для

предельной скорости центра по отношению к опрокидыванию будем иметь выражение

$$v_0^2 = 2g\,\frac{r^3}{\delta^2}\,(1-\cos\varphi_0)\cos^2\varphi_0,$$

или, заменяя r через a,

$$v_0^2 = \frac{ga^2}{4\delta^2}\,\frac{1-\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}.$$

Более полное изложение этих вопросов, специально в отношении сейсмических явлений, см., например, L. De Marchi, I. terremoti; Cause ed effetti; *Atti del Collegio Padovano degli Ingegneri* (Padova, 1909); а также F. Omori, Seismic experiments on the fracturing and overturning of columns, *Publications of the Earthquake investigations Commitee* (Япония), № 4 (Токио, 1899) и т. IV, № 1 (Токио, 1910).

16. Два твердых тела S_1, S_2 вращаются вокруг одной и той же оси a с угловыми скоростями соответственно ω_1 и ω_2. Между этими двумя телами внезапно вводится жесткая связь. Их общая угловая скорость ω (как это непосредственно следует из основного уравнения моментов, примененного по отношению к оси a и к совокупности двух тел) имеет значение

$$\omega = \frac{A_1\omega_1 + A_2\omega_2}{A_1 + A_2},$$

где A_1, A_2 — моменты инерции тел относительно оси. Потеря живой силы (сравнить с потерей, которая имеет место при центральном и прямом ударе совершенно упругих тел и вычислена в п. 6) будет равна

$$-\Delta T = \frac{1}{2}\,\frac{A_1A_2}{A_1+A_2}\,(\omega_1-\omega_2)^2.$$

17. Гибкая и нерастяжимая нить имеет один неподвижный конец A, а другой конец привязан к некоторой точке O поверхности твердого тела S.

Предположим, что нить не натянута и что твердое тело падает с начальной скоростью или из состояния покоя.

В момент, когда нить натянется, произойдет внезапное изменение в состоянии движения тела S и последующая потеря живой силы, выражению которой можно придать простой вид.

Для этой цели удобно исходить из общей формулы (19) п. 9, дающей потерю живой силы $-\Delta T$ в функции прямо приложенных импульсов. Для настоящего случая надо заметить, что в момент, когда нить натягивается, твердое тело испытывает в точке O импульс с заранее неизвестной величиной I, но направленный, очевидно, по нити от O к A.

Такой импульс выражается вектором In, где n есть единичный вектор, направленный по $\overrightarrow{OA}$.

Система внешних импульсов, которой подвергается твердое тело, сводится к единственному импульсу In, приложенному в O. Благодаря этому упомянутая формула (19) дает

$$-\Delta T = -\frac{1}{2}\,I\,\{n\cdot(v_0^+ + v_0^-) + [\overrightarrow{GO}\times n]\cdot(\omega^+ + \omega^-)\}.$$

Но в силу основной формулы кинематики неизменяемых систем, скорость V точки O в любой момент выражается в виде

$$V = v_0 + \omega\times\overrightarrow{GO}.$$

Отсюда естественно, как в п. 17 (формула 31), следует

$$-\Delta T = -\frac{1}{2} I (V_n^+ + V_n^-),$$

где $V_n = V \cdot n$ есть проекция V на направление нити.

В силу нерастяжимости нити эта проекция будет уничтожена ударом, так как $V_n^+ = 0$. Естественно, что V_n^-, как обычно, нужно считать данной величиной; можно добавить, что она необходимо будет отрицательной, так как в момент, когда нить становится натянутой, скорость (до удара) точки O должна соответствовать некоторому удалению точки A и, следовательно, образовывать тупой угол с вектором $\overrightarrow{OA}$ или с n.

Остается вычислить I, для чего достаточно присоединить условие $V_n^+ = 0$ к основным уравнениям

$$\Delta v_0 = \frac{I}{m} n, \quad \Delta\omega = I\sigma^{-1}(\overrightarrow{OG} \cdot n).$$

Составляя из этих выражений величину

$$\Delta V = \Delta v_0 + \Delta\omega \cdot \overrightarrow{OG}$$

и затем умножая скалярно на n и принимая во внимание, что $V_n^+ = 0$, найдем

$$-V_n^- = \frac{1}{\mu} I,$$

где для краткости положено

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} \sigma^{-1}(\overrightarrow{OG} \cdot n) \cdot \sigma^{-1}(\overrightarrow{OG} \cdot n).$$

Коэффициент $1/\mu$ при I полезно выразить в явной форме способом, аналогичным тому, которым мы пользовались в п. 17.

Если отнести к главным центральным осям инерции $Gxyz$ и обозначить через x, y, z координаты точки O, через α, β, γ направляющие косинусы единичного вектора n, то получим

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{(y\gamma - z\beta)^2}{A} + \frac{(z\alpha - x\gamma)^2}{B} + \frac{(x\beta - y\alpha)^2}{C}.$$

При этом значении коэффициента μ для потери живой силы мы найдем окончательное выражение

$$-\Delta T = \frac{1}{2} \mu (V_n^-)^2.$$

18. Импульсивное движение двух тел, соединенных шарниром в некоторой точке O. Пусть S, S' — два твердых тела, G, G' — их центры тяжести и m, m' — соответствующие массы. Изменения кинематических характеристик движения данных тел под действием приложенных импульсов можно определить, прибегая для каждого из тел к основным уравнениям (с полюсом в соответствующем центре тяжести) и вводя в виде вспомогательного неизвестного реактивный импульс I тела S' на S, которому, естественно, соответствует импульс $-I$ тела S на S'. В силу этого будем иметь пятнадцать неизвестных (т. е. изменения проекций двух пар характеристических векторов данных твердых тел и три проекции импульса I); для того чтобы сделать определенной задачу, достаточно присоединить к двум парам основных уравнений, относящихся к S и S' (которые дают двенадцать скалярных уравнений), три дальнейших уравнения, выражающих то, что внезапное изменение вектора скорости точки O будет

одним и тем же, будет ли эта точка отнесена к S или к S'. Можно избежать введения и последующего исключения вспомогательной величины I, прямо принимая за полюс в обоих телах точку O. В силу этого подлежащие определению неизвестные можно свести к изменениям $\Delta\omega$, $\Delta\omega'$ угловых скоростей тел S, S' и к изменению Δv скорости v точки O. Эти три неизвестных вектора будут связаны такими же векторными уравнениями, не зависящими от I, к которым можно придти следующим образом.

Прежде всего, применяя первое основное уравнение (17) к системе двух твердых тел S и S', получим уравнение

$$m\Delta v_0 + m'\Delta v_0' = \mathbf{R} + \mathbf{R}', \tag{3}$$

где v_0, v_0' обозначают скорости двух центров тяжести G, G', а $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'$ — результирующие импульсов, прямо приложенных к двум телам (за исключением, конечно, реактивных импульсов I тела S' на S и $-I$ тела S на S'). В силу основной формулы кинематики неизменяемой системы имеем

$$v_0 = v - \omega \times \overrightarrow{GO}, \quad v_0' = v - \omega' \times \overrightarrow{G'O} \tag{4}$$

откуда, исключая v_0 и v_0' из уравнения (3), мы получим первое из упомянутых уравнений в виде

$$(m + m')\,\Delta v - m\Delta\omega \times \overrightarrow{GO} - m'\Delta\omega' \times \overrightarrow{G'O} = \mathbf{R} + \mathbf{R}'. \tag{3'}$$

Два других уравнения получатся из второго основного уравнения, написанного для каждого тела отдельно. Выбрав за полюс моментов для обоих тел точку O и обозначив через K, K' моменты количеств движения обоих тел относительно O, через $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ результирующие моменты относительно той же точки импульсов, прямо приложенных соответственно к S и S', будем иметь

$$\Delta K = \mathbf{M}, \quad \Delta' K = \mathbf{M}';$$

при этом предполагается, что в выражениях векторов K, K' через проекции характеристических векторов (формулы (30) гл. IV, которые для простоты удобно спроектировать прямо на главные оси инерции относительно точки O) скорости v_0, v_0' должны быть исключены при помощи уравнений (4).

19. Плоская задача. Применим общие рассуждения предыдущего упражнения к случаю двух твердых плоских фигур, связанных шарниром в некоторой точке O и находящихся под действием импульсов, лежащих в плоскости фигуры.

Примем систему неподвижных осей x, y, имеющих началом положение занимаемое шарниром в момент, когда будут приложены импульсы. Обозначая через x, y и x', y' координаты центров тяжести G, G' обеих фигур и имея в виду скорости точек G, G', которые мы обозначим здесь через v, v', на основании равенства (3), спроектированного на обе оси, будем иметь прежде всего

$$m\Delta v_x + m'\Delta v_x' = \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_x', \quad m\Delta v_y + m'\Delta v_y' = \mathbf{R}_y + \mathbf{R}_y'; \tag{5}$$

приравнивая проекции изменения скорости точки O, которые мы получим, рассматривая эту точку как принадлежащую один раз телу S, а другой раз телу S', придем к уравнениям

$$\Delta v_x + y\Delta\omega = \Delta v_x' + y'\Delta\omega', \quad \Delta v_y - x\Delta\omega = \Delta v_y' - x'\Delta\omega', \tag{6}$$

где скалярные величины ω и ω', как и в случае непрерывного плоского движения (гл. VII, п. 14), представляют собой угловые скорости с надлежащим знаком.

Что касается уравнений моментов, то они здесь принимают вид

$$C\Delta\omega + m(x\Delta v_y - y\Delta v_x) = M_z, \quad C'\Delta\omega' + m'(x'\Delta v_y - y'\Delta v_x) = M'_z, \qquad (7)$$

где CC' обозначают центральные моменты инерции двух тел (относительно перпендикуляра к плоскости) и, естественно, M_z, M'_z — моменты относительно точки O импульсов, прямо приложенных к S и S'.

20. Предположим, что S, S' (предыдущее упражнение) суть два однородных стержня OA, OA', равной длины l и равной массы m. В некоторый заданный момент, когда они перпендикулярны между собой и находятся в покое, на точку A' действует импульс величиной I, перпендикулярный к OA' и направленный в сторону OA. В таком случае, если совместим оси x, y с направленными прямыми, на которых в момент действия импульса находятся соответственно OA, OA', уравнения (5), (6), (7) предыдущего упражнения примут вид

$$v_x^+ + v_x'^+ = \frac{I}{m}, \qquad v_y^+ + v_y'^+ = 0; \qquad (5')$$

$$v_x^+ = v_x'^+ + \frac{l}{2}\omega'^+, \quad v_y^+ - \frac{l}{2}\omega^+ = v_y'^+; \qquad (6')$$

$$C\omega^+ + \frac{1}{2}lmv_y^+ = 0, \; C'\omega'^+ - \frac{1}{2}lmv_x'^+ = -lI. \qquad (7')$$

Принимая во внимание, что $C = ml^2/12$, доказать, что импульс не сообщит стержню OA никакой угловой скорости и скорости центров тяжести в направлении, нормальном к самому импульсу, не изменятся: скорости же центров тяжести в направлении импульса будут направлены в противоположные стороны и будут находиться в отношении $2/7$ между собой, а угловая скорость стержня OA' будет равна $-18I/(5lm)$.

21. Наряду со случаем предыдущего упражнения рассмотреть и те случаи, когда стержень OA' свободен или же закреплен в O, и проверить, что а) скорость центра тяжести OA' в направлении и в сторону импульса равна I/m для свободного стержня, $3I/(2m)$ для стержня, закрепленного в точке O, $7I/(5m)$ в случае шарнирного соединения с OA; б) значения угловой скорости стержня соответственно будут $-6I/(lm)$, $-3I/(lm)$, $-18I/(5lm)$; в) скорости точки приложения импульса соответственно равны $4I/m$, $3I/m$, $16I/(5m)$.

22. Рассмотрим центральный удар между двумя телами, и притом не обязательно прямой (как это всегда имеет место в случае двух шаров). Значения после удара нормальных составляющих двух скоростей центров тяжести во всяком случае можно представить элементарными формулами п. 4, так что, в частности, для удара двух равных и совершенно упругих шаров останется в силе правило, что шары обменяются нормальными составляющими скоростей соответствующих центров тяжести (а касательные составляющие останутся неизменными).

23. Интересные задачи об ударе между шарами, большей частью равными, или между шарами и плоскостью относятся к игре на биллиардеі в частности, к игре в карамболь. Ср. G. Coriolis, Théorie mathématiqur, des effets du jeu du billard, Paris, 1835, H. Resal, Commentaire à la théoee: mathématique du jeu du billard, *Journ. de math.* (3), т. 9, 1883, стр. 65—98. G. W. Hemming, *Billards mathematically treated*, London, 1899; по технике игры и по историческим и библиографическим замечаниям см. J. Gelli, Bigliardo, bagatella e gioco delle bocce, Milano, Hoepli (4-е издание), 1924.

24. На материальную систему с какими угодно связями действуют две различные системы Σ, Σ' активных импульсов.

Из символического уравнения (48) движения под действием мгновенных сил (п. 22) в предположении, что скорости удара $\bar{v}_i$ удовлетворяют уравнению (49) (в силу чего Δv_i входят в число виртуальных перемещений δP_i), следует, что при внезапных изменениях скоростей, происходящих от импульсов Σ', импульсы Σ совершают полную работу, равную той, которую импульсы Σ' совершают при внезапных изменениях скоростей, вызванных импульсами Σ. См. N. Seiliger. *Comptes rendus*, т. 117, 1893, стр. 578—579. Аналогичное предложение, относящееся к обыкновенным силам (гл. V, упражнение 7), было впоследствии установлено Морера.

25. Применить теорему взаимности, о которой говорилось в предыдущем упражнении, к случаю твердого тела, свободного или со связями.

Задача для случая свободного твердого тела может быть сформулирована следующим образом.

Для двух систем импульсов Σ, Σ', прямо приложенных к твердому телу, пусть будут $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'$ результирующие, $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ результирующие моменты, взятые, первый относительно любой точки O, второй относительно точки O', вообще говоря, отличной от O. Обозначим через $\Delta v_0'$ и $\Delta\omega$ изменения, вызываемые импульсами Σ в скорости точки O' и в угловой скорости твердого тела, через $\Delta' v_0$ и $\Delta'\omega$ аналогичные изменения, вызываемые импульсами Σ' в скорости точки O и в угловой скорости.

Общая теорема взаимности, высказанная в предыдущем упражнении, выражается здесь равенством

$$\mathbf{R}\cdot\Delta' v_0 + \mathbf{M}\cdot\Delta'\omega = \mathbf{R}'\cdot\Delta v_0' + \mathbf{M}'\cdot\Delta\omega.$$

Предполагая, что твердое тело находилось первоначально в покое, исследовать частные случаи, когда:

а) Σ сводится к единственному импульсу, приложенному в точке O; Σ' — к единственному импульсу, приложенному в O';

б) Σ и Σ' сводятся вместе к одной паре.

Сделать аналогичное применение теоремы взаимности к твердому телу со связями (с одной неподвижной точкой или с одной неподвижной прямой).

26. Дальнейшее применение теоремы взаимности (упражнение 24) можно сделать к голономным системам (п. 29). Если J_h и J_h' суть лагранжевы составляющие двух различных систем импульсов, прямо приложенных к заданной голономной системе, и $\Delta\dot{q}_h$, $\Delta'\dot{q}_h$ — изменения лагранжевых скоростей, вызванных ими, то (по общей теореме взаимности) будем иметь

$$\sum_{h=1}^{n} J_h \Delta'\dot{q}_h = \sum_{h=1}^{n} J_h' \Delta\dot{q}_h.$$

Это соотношение может быть и прямо проверено на основании формул относящихся к голономным системам. Действительно, имеем (п. 29 предыдущей главы и гл. X, п. 5)

$$J_h = \Delta p_h = \sum_{h=1}^{n} a_{hk}\Delta\dot{q}_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

и аналогично для букв со штрихами.

Фактическая подстановка в обе части предыдущей формулы покажет тождество их, если принять во внимание, что $a_{hk} = a_{kh}$, так как речь идет о коэффициентах квадратичной формы (квадратичная часть T_2 живой силы системы, или прямо живая сила, если связи не зависят от времени).

Предположим, в частности, что равны нулю все импульсы J, за исключением импульса J_α, и все импульсы J', за исключением импульса $J'_\beta = J_\alpha$ Тогда будем иметь

$$\Delta' \dot{q}_\alpha = \Delta \dot{q}_\beta,$$

что можно высказать так: два равных импульса, действующих по двум различным координатам, определяют каждый равные изменения скорости, соответствующей другому импульсу.

27. Рассмотрим в неподвижной плоскости четыре однородных стержня равной длины l и равной массы m, соединенных попарно так, что они составляют ромб $ABCD$. Обозначив через O центр ромба, примем за вспомогательные оси Ox, Oy соответственно диагонали OA, OB. Система в своей плоскости будет иметь четыре степени свободы. За лагранжевы координаты примем прежде всего три параметра, определяющие положение осей Oxy относительно двух неподвижных осей, т. е. координаты α, β точки O и угол θ оси Ox с неподвижной осью, и, кроме того, угол, определяющий конфигурацию ромба относительно его диагоналей, например, угол ψ направленного стержня CB с осью Ox, который будет точно таким же, как и угол OG_1 с осью Ox, если через G_1 обозначим среднюю точку (центр тяжести) стержня AB. Рассматривая вместе с G_1 средние точки G_2, G_3, G_4 соответственно стержней BC, CA, AD и обозначая через a_j, b_j координаты относительно осей Oxy точки G_j и через ψ_j угол OG_1 с осью Ox ($i = 1, 2, 3, 4$), очевидно будем иметь

$$\psi_1 = \psi, \quad \psi_2 = \pi - \psi, \quad \psi_3 = \pi + \psi, \quad \psi_4 = -\psi,$$
$$a_j = \frac{l}{2}\cos\psi_j, \quad b_j = \frac{l}{2}\sin\psi_j \qquad (j = 1, 2, 3, 4),$$

откуда непосредственно следует

$$\sum_{j=1}^{4} a_j = \sum_{j=1}^{4} b_j = 0; \tag{8}$$

дифференцируя эти равенства по времени, найдем

$$\sum_{j=1}^{4} a_j \dot{\psi}_j = \sum_{j=1}^{4} b_j \dot{\psi}_j = 0. \tag{9}$$

Для стержня с центром тяжести G_j угловая скорость относительно осей Oxy, очевидно, будет $\dot{\psi}_j$, а относительно неподвижных осей $\dot{\theta} + \dot{\psi}_j$; так как проекции относительной скорости точки G_j на оси Oxy равны соответственно $-b_j\dot{\psi}_j$, $a_j\dot{\psi}_j$, а аналогичные проекции переносной скорости равны $\dot{\alpha} - b_j\dot{\theta}$, $\dot{\beta} + a_j\dot{\theta}$, то живая сила рассматриваемого стержня на основании теоремы Кёнига имеет выражение

$$\frac{1}{2} m \{[\dot{\alpha}_j - b_j(\dot{\theta} + \dot{\psi}_j)]^2 + [\dot{\beta} + a_j(\dot{\theta} + \dot{\psi}_j)]^2\} + \frac{1}{2} C (\dot{\theta} + \dot{\psi}_j)^2,$$

где $C = ml^2/12$ есть момент инерции каждого из четырех стержней относительно своего центра тяжести. Суммируя по j от 1 до 4 и принимая во внимание значения $\dot{\psi}_j$, а также тождества (8), (9) и равенства

$$a_j^2 + b_j^2 = \frac{l^2}{4} \qquad (j = 1, 2, 3, 4),$$

мы получим для живой силы T системы выражение

$$T = \frac{1}{2} m \left\{ 4 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{4}{3} l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) \right\}.$$

Заметив это, предположим, что к ромбу в некоторых N его точках P_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) приложено столько же активных импульсов I_i, лежащих в плоскости ромба. Согласно п. 29 уравнениями импульсивного движения ромба будут

$$4m\Delta\dot{\alpha} = J_\alpha, \quad 4m\Delta\dot{\beta} = J_\beta, \quad \frac{4}{3} l^2 m \Delta\dot{\theta} = J_\theta,$$

$$\frac{4}{3} l^2 m \Delta\dot{\psi} = J_\psi,$$

где лагранжевы составляющие J импульсов (обобщенные импульсы) будут не чем иным, как коэффициентами при бесконечно малых приращениях соответствующих координат в выражении виртуальной работы прямо приложенных импульсов

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} I_i \cdot \delta P_i.$$

В нашем случае каждое отдельно взятое δP_i (абсолютное виртуальное перемещение) можно представить себе разложенным на два слагаемых $\delta' P_i$, $\delta'' P_i$, первое из которых есть перемещение относительно системы Oxy, а второе — переносное перемещение, т. е. перемещение, которое имела бы точка P_i, если бы ромб был недеформируемым. Вследствие этого совокупность членов в δL, зависящих от $\delta'' P_i$, соответствует перемещению неизменяемой системы (плоской), так что если мы выберем неподвижные оси в положении, занимаемом осями Oxy в момент, когда действуют импульсы, то эта совокупность может быть представлена в виде (гл. IV, п. 5)

$$\mathrm{R}_x \delta\alpha + \mathrm{R}_y \delta\beta + \mathrm{M}\delta\theta,$$

где R_x, R_y — суть проекции на оси Oxy результирующей прямо приложенных к системе импульсов и M — их результирующий момент (скалярный) относительно точки O.

Для вычисления той части δL, которая зависит от $\delta' P_i$, рассмотрим стержень с центром тяжести G_j. Относительное виртуальное перемещение стержня получается при скольжении его концов по двум осям Oxy, так что мгновенный центр вращения (т. I, гл. V, пп. 12, 15) совпадает с вершиной O_j, противоположной O, в прямоугольнике, имеющем второй диагональю стержень, и поэтому имеет координаты $2a_j$, $2b_j$.

Так как относительное виртуальное вращение равно $\delta\psi_j$, то часть в δL, которая зависит от $\delta' P_i$ и соответствует рассматриваемому стержню, будет равна $\mathrm{M}_j \delta\psi_j$, где M_j есть результирующий момент (скалярный) относительно точки O_j импульсов, прямо приложенных к стержню.

Поэтому, имея в виду значение углов ψ_j, заключаем, что

$$\delta L = \mathrm{R}_x \delta\alpha + \mathrm{R}_y \delta\beta + \mathrm{M}\delta\theta + (\mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3 - \mathrm{M}_4)\, \delta\psi$$

и, следовательно,

$$J_\alpha = \mathrm{R}_x, \quad J_\beta = \mathrm{R}_y, \quad J_\theta = \mathrm{M}, \quad J_\psi = \mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3 - \mathrm{M}_4.$$

Принимая во внимание все предшествующее (или, если угодно, применяя прямо основные уравнения и вводя в виде вспомогательных неизвестных реактивные импульсы, действующие между стержнями в шарнирах), доказать, что:

а) импульсивная пара, приложенная к одному из стержней, вызывает резкое изменение его угловой скорости, равное одной восьмой части от угловой скорости, которую стержень имел бы, если бы он был свободным, а два другие стержня не подвергались действию импульсов;

б) если к четырем стержням ромба приложить столько же равных импульсивных пар, то отдельные стержни испытают резкое изменение угловой скорости, равное четвертой части от того изменения скорости, которое испытал бы каждый стержень, если бы он был свободным.

28. Кинетическое объяснение давления газа. Взгляд, что материя состоит из мельчайших неделимых частиц (*атомов*, согласно этимологическому значению слова), восходит, как известно, к древности (Левкипп и Демокрит, V—IV века до нашей эры). Но только в эпоху Возрождения у Петра Гассенди (1592—1655) этот взгляд принимает впервые характер научной гипотезы, т. е. гипотезы, способной привести к количественному или, по крайней мере, к качественному предвидению физических фактов. Если выражаться современным языком, то можно сказать, что Гассенди, предполагая, что всякое тело состоит из огромного числа частиц (молекул), тождественных между собой для всякого химически определенного вещества и уподобляемых совершенно упругим телам, искал в движении этих мельчайших частиц объяснение тепловых явлений и рассматривал *теплоту* как макроскопическое проявление таких внутренних движений.

Всякое тело оказывается тем теплее, чем более интенсивно его молекулярное движение. В этом или, лучше, в соответствующей живой силе, заключается возможная абсолютная мера температуры, абсолютный нуль которой характеризовал бы отсутствие всякого молекулярного движения.

С этой точки зрения три аггрегатных состояния материи соответствуют трем типам движения, которые, смотря по обстоятельствам, могут совершать молекулы. Если речь идет о простом колебательном движении вокруг средних неподвижных положений, для чего, конечно, требуется, чтобы различные молекулы действовали друг на друга с некоторыми силами, то мы имеем дело с состоянием, характерным для твердого тела. При возрастании температуры растут точно так же амплитуды и интенсивность молекулярных движений, которые могут сделаться такими, что уже нельзя более говорить о колебаниях; каждая частица участвует в общем хаотическом движении, однако движения всех частиц еще достаточно стеснены, чтобы были невозможны их свободные движения. Динамические действия и удары беспрестанно изменяют прямолинейное и равномерное движение, в котором находилась бы каждая частица, если бы не было других; мы имеем жидкое состояние. При дальнейшем увеличении температуры, а вместе с ней и скоростей частиц, частицы делаются все более и более свободными, и прямолинейное и равномерное движение их становится правилом, а причины, нарушающие это движение (силы взаимодействия и удары) оказываются теперь только исключением. Таким образом мы приходим к кинетической модели газообразного состояния.

Такими интуитивными соображениями руководствовался Даниил Бернулли, который в своей знаменитой „Гидродинамике" (1736) дал, между прочим, первое и замечательное количественное приложение этих соображений, получив из них объяснение давления и, следовательно, закона Бойля.

Мы дадим здесь краткое изложение этого вывода.

Рассмотрим однородную массу газа, заключенную в сосуде и находящуюся в покое в механическом смысле слова. Допустим, что эта масса, кажущаяся неподвижной в макроскопическом смысле, состоит из огромного числа молекул, которые быстро двигаются, не подвергаясь действию ни внешних, ни внутренних сил. При этих условиях центр тяжести каждой частицы движется прямолинейно и равномерно до тех пор, пока не произойдет удар о другую частицу или о стенку сосуда. Эти удары

определяют резкие изменения скоростей, так что траектория каждой частицы будет ломаной.

Для таких ударов допустима пригодность законов центрального удара между совершенно упругими телами. Мы имели бы модель такого движения, воображая молекулы в виде совершенно упругих шариков; но мы отвлечемся от всякого предположения об их строении, довольствуясь возможностью рассматривать их в виде таких материальных точек, что всякое столкновение изменяет скорость их так же, как и центральный удар.

Наконец, предположим, что для всякого химически определенного газа все молекулы тождественны между собой и, в частности, имеют одну и ту же массу m.

К этим чисто механическим гипотезам надо добавить специфические постулаты, уточняющие интуитивные соображения, основанные на числе частиц, которое предполагается огромным. Допустим, что во всяком элементе объема ΔS, доступном для обычного опыта (например, имеющем размеры порядка величины доли миллиметра) благодаря огромному числу молекул, содержащихся в нем, возможны статистические замены, так что если мы выберем момент t и положение P объема, занимаемого массой газа, то можно будет принять, что для всех объемов ΔS, окружающих в этот момент t положение точки P, средняя величина какой-нибудь характеристики молекулярного движения, зависящая от P и t, но не от частной формы элемента ΔS, приблизительно будет одна и та же.

Основываясь на этом соображении, обратим внимание на *число молекул в единице объема* (в заданном месте P и в заданный момент t), т. е. на отношение между полным числом молекул, находящихся в момент t внутри любого объема ΔS, окружающего P, и объемом этой элементарной области, который будем обозначать также через ΔS. Это отношение, которое мы обозначим через N, вообще говоря, будет функцией от P и t. Но если речь идет о явлениях (макроскопически) стационарных и однородных, то оно оказывается постоянным и называется числом Авогадро, впервые заметившим, что речь идет о постоянной, общей для всех газов, находящихся в одинаковых условиях температуры и давления. Значение этой постоянной имеет порядок величины $2{,}7 \cdot 10^{19}$ на кубический сантиметр (при давлении в одну атмосферу и при температуре 0°).

Аналогично определится и плотность μ (в точке P и в момент t) как отношение полной массы молекул, содержащихся в момент t внутри любого объема ΔS, окружающего P, к объему ΔS. А так как $N\Delta S$ равно числу этих молекул и каждая из них, когда речь идет о химически определенном газе, имеет одну и ту же массу m, то будем иметь

$$\mu = \frac{mN\Delta S}{\Delta S} = mN. \tag{10}$$

Добавим, что если q есть какая-нибудь величина, скалярная или векторная, вполне определенная для каждой молекулы газа, взятой отдельно, то мы назовем *средним значением* $[q]$ величины q в точке P и в заданный момент t отношение

$$\frac{\Sigma q}{N\Delta S},$$

где предполагается, что ΔS имеет обычный порядок величины (указанный выше), а сумма должна быть распространена на все молекулы, содержащиеся в момент t внутри ΔS.

Так, *средняя скорость* (в векторном смысле) определится отношением

$$\frac{\Sigma \mathbf{v}}{N\Delta S};$$

и в случае изотропии вокруг P, которая наверное будет иметь место для стационарных явлений при отсутствии сил, ни одно из направлений не должно рассматриваться предпочтительным, более точно, скорости должны быть распределены почти равномерно во всех направлениях вокруг P, так что указанная выше средняя скорость $[v]$ необходимо будет равна нулю и таковыми же будут ее составляющие $[v_x]$, $[v_y]$, $[v_z]$ по любым трем осям (неподвижным), неизменно связанным с сосудом (или, что то же, по всякому возможному направлению).

Но этого не может случиться со средней величиной квадрата скорости

$$[v^2] = \frac{\Sigma v^2}{N\Delta S},$$

которую мы будем обозначать здесь просто через C^2. Эта постоянная C, которая, очевидно, имеет размерность скорости, так как $N\Delta S$ есть отвлеченное число, называется *эффективным значением скорости.*

В предположении совершенной изотропии вокруг P естественно, что для эффективных значений составляющих скорости по направлениям трех осей (как и по всякому возможному направлению) имеем

$$[v_x^2] = [v_y^2] = [v_z^2],$$

откуда следует

$$3\,[v_x^2] = [v^2] = C^2, \tag{11}$$

таким образом, эффективное значение любой составляющей скорости выражается весьма просто через C^2.

После всех этих предварительных замечаний мы можем дать точную форму кинетическому объяснению давления и доказательству закона Бойля, которые, как было сказано выше, восходят к Бернулли.

Мы придем к этому, рассматривая давление на стенку сосуда (которое экспериментально может быть измерено, например, посредством манометра) как эффект среднего числа бесчисленных и беспрестанных ударов, которые молекулы газа в их движении производят на стенку; выражаясь точнее, мы введем понятие *удельного давления* как некоторой величины (векторной), которая имеет размерность силы, деленной на площадь, и определяется следующим образом. Рассмотрим произвольный элемент $\Delta\sigma$ стенки и результирующую импульсов, которые она испытывает со стороны молекул газа в течение элемента времени Δt, следующего за произвольным моментом t. *Удельным давлением* называется отношение названной результирующей к произведению $\Delta\sigma\,\Delta t$. Обозначим через n нормаль, направленную наружу по отношению к сосуду.

Все, очевидно, сведется к оценке совокупности импульсов, которые испытывает элемент $\Delta\sigma$ со стороны молекул, ударяющихся об него в течение заданного элемента времени Δt. Так как, по предположению, мы имеем здесь дело все время с центральными ударами между совершенно упругими телами, то каждая молекула, которая прибывает к стенке с нормальной скоростью (до удара) v_n, оттолкнется с нормальной скоростью $-v_n$ (а касательная скорость останется неизменной), так что импульс, испытываемый молекулой, будет целиком направлен по n и равен $-2mv_n$, а противоположный импульс, испытываемый площадкой $\Delta\sigma$, будет тоже направлен нормально и равен $2mv_n$. Поэтому мы должны вычислить

$$2\Sigma mv_n,$$

где сумма должна быть распространена на все молекулы, которые за элемент времени Δt ударяются о $\Delta\sigma$.

Для того чтобы оценить эту сумму, рассмотрим отдельно ту ее долю, которую привносят молекулы, ударяющиеся об элемент $\Delta\sigma$ за выбранный

элемент времени, приходя изнутри массы газа со скоростью $\boldsymbol{v}'$, заданной по величине и направлению. В момент времени t все эти молекулы находятся в том цилиндре с основанием $\Delta\sigma$, который имеет образующие, определенные по длине и направлению вектором $\boldsymbol{v}'\,\Delta t$. В совокупности всех молекул газа, содержащихся в момент t внутри этого цилиндра, будут (если не обращать внимание на возможные взаимные удары в последующий элемент времени Δt) все те, которые имеют скорость $\boldsymbol{v}'$; мы будем называть их для определенности молекулами со скоростью $\boldsymbol{v}'$. Объем цилиндра равен $\Delta\sigma\,\Delta t\cdot v_n'$ и, если представим себе, что $\Delta\sigma$ и Δt выбраны достаточно малыми, для того чтобы такой объем был порядка величины наших объемов ΔS, то мы можем говорить о числе (в среднем) молекул со скоростью $\boldsymbol{v}'$, содержащихся в цилиндре в момент t. Если обозначим это число через $N'\,\Delta\sigma\,\Delta t\cdot v_n'$, в силу чего N' представляет собой значение (в среднем) числа молекул со скоростью $\boldsymbol{v}'$, содержащихся в единице объема, то доля молекул со скоростью $\boldsymbol{v}'$ в полном импульсе $2\Sigma m v_n$, относящемся к $\Delta\sigma$ и к элементу времени Δt, будет равна

$$2N'\,\Delta\sigma\,\Delta t\,v_n'\cdot m v_n' = 2mN'\,\Delta\sigma\,\Delta t\cdot v_n'^2;$$

мы получим искомую сумму, если просуммируем различные слагаемые этого типа, соответствующие уже не всевозможным значениям $\boldsymbol{v}'$, а только половине их, т. е. как раз всем значениям $\boldsymbol{v}'$, которые с ориентированной нормалью n образуют острый и самое большее прямой угол. В этом смысле можно написать

$$2\Sigma m v_n = m\,\Delta\sigma\,\Delta t\;\Sigma N' v_n'^2,$$

где сумма теперь должна быть распространена на все значения $\boldsymbol{v}'$. Рассматривая, в частности, единицу объема, будем иметь

$$[v_n^2] = \frac{\Sigma v_n^2}{N} = \frac{\Sigma N'\,[v_n'^2]}{N};$$

откуда следует

$$2\Sigma m v_n = m\,\Delta\sigma\,\Delta t\cdot N\,[v_n^2],$$

или на основании формул (10), (11)

$$2\Sigma m v_n = \frac{1}{3}\,\Delta\sigma\,\Delta t\cdot\mu C^2.$$

Разделив на $\Delta\sigma\,\Delta t$, заключаем, что сила на единицу площади поверхности, *направленная нормально* наружу по отношению к области, занимаемой газом, равна $\mu C^2/3$. Это и есть величина удельного давления p, которая вытекает из принятой кинетической модели, а полученное таким образом уравнение

$$p = \frac{1}{3}\,\mu C^2, \tag{12}$$

выражает *пропорциональность между давлением и плотностью*, т. е. закон Бойля.

Так как p и μ могут быть измерены, то из уравнения (12) мы можем получить некоторую оценку порядка величины эффективной скорости C при обыкновенном давлении в одну атмосферу и при температуре 0°.

Например, написав уравнение (12) в виде

$$C^2 = \frac{3p\,g}{\gamma g}$$

и принимая во внимание, что для воздуха, кислорода и водорода вес 1 *л* в граммах (или, что то же, вес 1 $м^3$ в килограммах) соответственно определяется числами

$$1{,}293,\quad 1{,}42,\quad 0{,}09,$$

и атмосферное давление приближенно равно 1 *кг* на квадратный сантиметр, мы увидим, что соответствующие эффективные скорости в метрах в секунду приблизительно будут равны

$$485,\quad 461,\quad 1839.$$

Таким образом, мы видим, что для воздуха и для кислорода эффективные скорости будут порядка скоростей пуль современных винтовок, для водорода же они значительно выше.