ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА

[1] В связи с последними заключениями авторов следует заметить, что реакции связей в общем случае всегда можно представить только в функции обобщенных сил, координат и скоростей, но не ускорений.

Это обстоятельство представляет тем больший интерес, что в случае систем с реальными связями необходимо уметь определять нормальные реакции по заданному кинематическому состоянию системы и приложенным активным силам, чтобы ответить на вопрос, имеет ли место, начиная с данного момента, скольжение или нет.

Предположим для простоты, что некоторая точка системы опирается на шероховатую поверхность, и обозначим через N, T' и T'' нормальную реакцию связи и составляющие касательной реакции.

Освободим систему от данной связи, добавив к приложенным силам реакции N, T', T''; пусть теперь система имеет n степеней свободы и q_1, q_2, ..., q_n — ее координаты.

Обозначим через v_n, v', v'' составляющие скорости точки приложения реакции в направлении составляющих N, T', T''; конечно, всегда можно выразить v_n, v', v'' через q_k и $\dot{q}_k$:

$$\left.\begin{aligned} v_n &= \alpha_{11}\dot{q}_1 + \alpha_{12}\dot{q}_2 + \ldots + \alpha_{1n}\dot{q}_n, \\ v' &= \alpha_{21}\dot{q}_1 + \alpha_{22}\dot{q}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\dot{q}_n, \\ v'' &= \alpha_{31}\dot{q}_1 + \alpha_{32}\dot{q}_2 + \ldots + \alpha_{3n}\dot{q}_n. \end{aligned}\right\} \qquad (а)$$

Отсюда легко определить виртуальные перемещения δn, $\delta\tau'$, $\delta\tau''$ и элементарную работу реакции

$$\delta A = N\delta_n + T'\delta\tau' + T''\delta\tau'' = \Sigma\,(N\alpha_{1k} + T'\alpha_{2k} + T''\alpha_{3k})\,\delta q_k. \qquad (б)$$

Пусть кинетическая энергия системы T есть однородная квадратичная форма обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2}\,\Sigma\Sigma a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k;$$

обозначим еще через Q_1, ..., Q_h обобщенные силы (активные).

Воспользовавшись второй формой уравнений Лагранжа, запишем их в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}\ddot{q}_1 + \ldots + a_{nn}\ddot{q}_n - \alpha_{11}N - \alpha_{21}T' - \alpha_{31}T'' = \\ &\quad = Q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dot{a}_{11}\dot{q}_1 - \dot{a}_{12}\dot{q}_2 - \ldots - \dot{a}_n\dot{q}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}\ddot{q}_1 + \ldots + a_{nn}\dot{q}_n - \alpha_n N - \alpha_{2n}T' - \alpha_{3n}T'' = \\ &\quad = Q_n + \frac{\partial T}{\partial q_n} - \dot{a}_{n1}\dot{q}_1 - \dot{a}_{n2}\dot{q}_2 - \ldots - \dot{a}_{nn}\dot{q}_n; \end{aligned}\right\} \qquad (в)$$

Добавим сюда уравнения связей $v_n = v' = 0$, $v'' = 0$, предполагая, что точка опоры не скользит (идеальная связь)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}\ddot{q}_1 + \ldots + \alpha_{nn}\ddot{q}_n &= -\dot{\alpha}_{11}\dot{q}_1 - \ldots - \dot{\alpha}_{1n}\dot{q}_n, \\ \alpha_{21}\ddot{q}_1 + \ldots + \alpha_{2n}\ddot{q}_n &= -\dot{\alpha}_{21}\dot{q}_1 - \ldots - \dot{\alpha}_{2n}\dot{q}_n, \\ \alpha_{31}\ddot{q}_1 + \ldots + \alpha_{3n}\ddot{q}_n &= -\dot{\alpha}_{31}\dot{q}_1 - \ldots - \dot{\alpha}_{3n}\dot{q}_n. \end{aligned}\right\} \qquad (г)$$

Из уравнений (в) и (г) можно определить $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n$, N, T', T'' через $Q_k, q_k, \dot{q}_k$, причем правые части уравнений содержат только квадраты или произведения $\dot{q}_k$, если Q_k не зависят от скоростей точек.

Даже не разрешая этих уравнений, можно высказать следующие утверждения.

(1) Мгновенные значения реакций связей зависят только от приложенных активных сил и кинематического состояния системы, т. е. определение их не требует знания *движения* системы.

(2) Реакции идеальных связей не меняют своего значения, если *все* обобщенные скорости одновременно изменяют знак, сохраняя величину, т. е. если обратить движение системы в данном положении.

(3) Если скорости $\dot{q}_1 = \omega_1$, $\dot{q}_2 = \omega_2, \ldots, \dot{q}_k = \omega_k$ — циклические и во много раз превосходят обобщенные скорости $\dot{q}_{k+1}, \ldots, \dot{q}_n$, то, ограничиваясь малыми первого порядка, найдем, что реакции N, T', T'' зависят *линейно* от $\dot{q}_{k+1} \ldots \dot{q}_n$. Если $\omega_1, \ldots, \omega_k$ остаются постоянными, то составляющие реакций, зависящие от q, изменят свой знак с изменением знака скоростей.

Все предложения остаются справедливыми и в том случае, когда рассматриваемая связь внутренняя.

Предположим, что мы нашли T', T'' и N:

$$T' = \frac{\Delta'}{\Delta}, \qquad T'' = \frac{\Delta''}{\Delta}, \qquad N = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ, Δ', Δ'', Δ_n — соответствующие определители. Всегда можно выбрать $T' \perp T''$, так что касательная реакция равна

$$\sqrt{\frac{\Delta'^2 + \Delta''^2}{\Delta}}.$$

Условие, при котором скольжение отсутствует, выразится неравенством

$$\Delta'^2 + \Delta''^2 < f^2 \Delta_n^2; \qquad (д)$$

это последнее определяет совокупность значений координат q_s и скоростей $\dot{q}_s$, при которых уравнения (в) и (г) остаются еще в силе.

Предположим теперь, что условие (в) не выполняется, точка скользит по шероховатой поверхности и сила трения равна $\pm f|N| = \varepsilon f|N|$. Тогда

$$T' = -f\frac{v'}{v}|N| \quad \text{и} \quad T'' = -f\frac{v''}{v}|N|, \qquad (е)$$

где

$$v = +\sqrt{v'^2 + v''^2}.$$

Теперь уравнения Лагранжа можно представить в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1+|N|\left(\alpha_{11}-f\frac{v'}{v}\alpha_{21}-f\frac{v''}{v}\alpha_{31}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_n}=Q_n+|N|\left(\alpha_{1n}-f\frac{v'}{v}\alpha_{2n}-f\frac{v''}{v}\alpha_{3n}\right),$$

$$\alpha_{11}\dot{q}_1+\alpha_{12}\dot{q}_2+\ldots+\alpha_{1n}\dot{q}_n=0.$$

Исключая реакцию $|N|$, получим $(n-1)$ уравнений движения, приравняв нулю определители второго порядка матрицы

$$\left\|\begin{matrix}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}-Q_1, \ldots\ldots, & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_n}-Q_n, \\ \varepsilon\alpha_{11}-f\frac{v'}{v}\alpha_{21}-f\frac{v''}{v}\alpha_{31}, \ldots\ldots, & \varepsilon\alpha_{1n}-f\frac{v'}{v}\alpha_{2n}-f\frac{v''}{v}\alpha_{3n}\end{matrix}\right\|;$$

последнее, n-ое, уравнение есть уравнение связи

$$\alpha_{11}\dot{q}_1+\alpha_{12}\dot{q}_2+\ldots\ldots+\alpha_{1n}\dot{q}_n=0.$$

Из уравнений (ж) можно найти реакцию $|N|$; как видно из этих уравнений, реакция $|N|$ не всегда определяется однозначно, так как она зависит от $\varepsilon=\pm 1$, что характерно для задач, в которых учитывается кулоновское трение.

То или иное значение ε выбирают, сообразуясь с неравенством $|N|\geqslant 0$. Если это неравенство удовлетворяется при каком-либо одном из значений ε, то задача вполне определенна, и ускорения $\ddot{q}_k$ определяются однозначно, что, однако, встречается не всегда. Если неравенство не удовлетворяется ни при одном из значений $\varepsilon=\pm 1$, то решение невозможно, а если оно удовлетворяется при любом из значений $\varepsilon=\pm 1$, то решение неопределенно. В этом случае и уравнения, получаемые из матрицы (з), обладают тем же свойством неопределенности.

Легко видеть, что число уравнений (ж) на единицу меньше числа неизвестных $\ddot{q}_k$, N, $|N|$, и для полной определенности необходимо еще одно уравнение, которое можно получить, только вводя новые физические предпосылки.

В § 9 гл. VIII, стр. 56 и сл., авторы книги рассматривают пример, в котором уравнения задачи приводят к противоречивым выводам, что в конце концов сводится к невозможности удовлетворить неравенству $|N|\geqslant 0$. К сожалению, выбранный ими пример не удачен, так как в процессе решения допущена ошибка в знаке, и все заключения авторов покоятся на недоразумении. Уравнение (63), получающееся в результате исключения величины $\dot{\omega}$ из уравнений (61) и (62), в действительности должно иметь вид

$$my_0\omega^2-\frac{x_0}{\delta^2}\{(r+y_0)A-x_0N\}+N-p=0,$$

откуда для начального момента, когда $A=fN$, вместо уравнения (64), приведенного авторами, получается уравнение

$$N\left\{1+\frac{\rho}{\delta^2}(\rho+fr)\right\}=p.$$

Читатель может найти более удачные примеры в указанной в тексте литературе или в книге П. Аппелль, „Руководство теоретической механики", т. 2, 1941 г., стр. 129—132.

[2] Гироскоп (указатель поворота) — название прибора, который демонстрировался французским физиком Фуко в 1852 г. в Парижской Академии наук. Прибор представлял собой „свободный гироскоп", т. е. быстро вращающийся маховичок, укрепленный в кардановом подвесе; ось маховичка сохраняла неизменное направление в пространстве и потому меняла положение относительно окружающих предметов, что и подтверждало вращение Земли вокруг своей оси.

[3] В основу элементарной теории гироскопа авторы положили два принципа: принцип сохранения направления гироскопической оси и принцип стремления осей к параллельности. Оба принципа являются, конечно, следствием уравнения (11) стр. 78, применение которого в каждом частном случае позволяет предсказать движение гироскопа и найти реакции наложенных на него связей, если гироскоп совершает вынужденное движение.

В современной теории гироскопических приборов считают более удобным записывать уравнение (11) в иной форме, а именно так, чтобы угловая скорость собственного вращения совсем не входила в левую часть уравнения движения:

$$A\frac{de}{dt} = M^* + Cr_0\boldsymbol{k} \times e. \qquad \text{(а)}$$

Этому уравнению можно придать очень простое и наглядное истолкование, если иметь в виду случаи, когда угловая скорость r_0 по абсолютной величине во много раз превосходит экваториальную составляющую e абсолютной угловой скорости ω и если, как это часто бывает, ее можно считать постоянной

Представим себе еще, что гироскоп заключен в кожух, и его абсолютная угловая скорость ω складывается из относительной угловой скорости r' и переносной угловой скорости e' кожуха, причем

$$|e| \ll |r'|$$

$$e + r_0\boldsymbol{k} = e' + r'.$$

Без большой погрешности можно положить

$$r_0 = r',$$

$$\frac{de}{dt} = \dot{e} + \dot{e}' \times e \approx \dot{e},$$

где $\dot{e}$ — производная от угловой скорости e, вычисленная по отношению к осям, связанным с кожухом, т. е. так, как если бы они были неподвижны.

Теперь уравнение (а) можно переписать в следующем виде:

$$A\dot{e} = M + Cr_0\boldsymbol{k} \times e. \qquad \text{(б)}$$

Кинетический момент гироскопа „почти" совпадает с направлением оси z; мы положим

$$H = Cr_0\boldsymbol{k}$$

и будем называть вектор H просто кинетическим моментом гироскопа, записывая уравнение (б) в окончательном виде:

$$A\dot{e} = M + H \times e', \qquad \text{(в)}$$

так как

$$H \times e' \equiv H \times e.$$

Уравнение (в) имеет такой вид, как если бы гироскоп вращался *только* вместе с кожухом под действием заданных сил с моментом $\boldsymbol{M}$ и, кроме того, добавочной пары, момент которой равен $\dot{\boldsymbol{H}} \times \boldsymbol{e}'$.

Этот последний момент

$$\Gamma = \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{e}' \equiv \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{e} \qquad (г)$$

называют гироскопическим моментом; он направлен всегда так, что стремится повернуть угловую скорость собственного вращения $r' \approx r_0$ (или вектор $\boldsymbol{H}$) на вогнутый угол до совпадения с угловой скоростью $\boldsymbol{e}'$ кожуха.

Физический смысл уравнения (г) формулируют в разных, но по существу эквивалентных формах:

а) можно отвлечься от собственного вращения гироскопа и учесть динамический эффект вращения, добавив к приложенным силам пару сил, момент которой равен гироскопическому моменту Γ;

б) видимое движение гироскопа (вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{e}$) происходит так, как если бы скрытое движение (вращение с угловой скоростью $r_0 = r'$) отсутствовало, а к приложенным силам с моментом $\boldsymbol{M}$ была бы приложена пара сил с моментом, равным гироскопическому моменту Γ;

в) при повороте быстро вращающегося около собственной оси гироскопа, появляется пара сил, момент которой равен гироскопическому моменту $\Gamma = He = He' \sin \alpha$; эта пара стремится повернуть угловую скорость собственного вращения гироскопа ($r_0\boldsymbol{k}$) на вогнутый угол до совпадения с угловой скоростью сообщаемого вращения $\boldsymbol{e}'$. (См., например, Н. Е. Жуковский, „Элементарная теория гироскопа", Полное собрание сочинений, т. I).

Если угловая скорость $\boldsymbol{e}$ изменяется очень медленно, т. е. если угловое ускорение $\dot{\boldsymbol{e}}$ невелико, то уравнение (в) записывают еще проще

$$M + H \times e' = 0, \quad \text{или} \quad M + \Gamma = 0, \qquad (д)$$

т. е. принимают, что при движении гироскопа приложенные силы и гироскопическая пара уравновешиваются. Именно в такой упрощенной форме пишут уравнения движения для очень точных и ответственных приборов (гирокомпас, гировертикали).

[4] Задача, которой намерен далее заняться автор, разрешена впервые Эйлером за 100 лет до Пуансо, и потому рассматриваемый в ней случай движения твердого тела около неподвижной точки обычно называют *случаем Эйлера*. Аналитическое исследование этого случая можно найти в книге: Суслов Г. К., Теоретическая механика, 1946.

[5] Вращение твердого тела около главной центральной оси инерции устойчиво, если ось вращения не совпадает с осью среднего из моментов инерции (или не является экваториальной в случае гироскопа); в противном случае вращение неустойчиво.

Можно было бы на этом основании ожидать, что достаточно сообщить небольшой толчок гироскопу, вращающемуся около экваториальной оси, чтобы отклонить мгновенную ось вращения на конечный угол от своего первоначального положения. Если бы мы выполнили такой опыт, то не получили бы ожидаемого эффекта: отклонение оси вращения было бы при этом едва заметным, а угловая скорость осталась бы почти без изменения. И все же нет никакого противоречия между опытом и заключением теоретического исследования, так как речь идет о различных оценках устойчивости. В теории исследуется устойчивость по отношению к проекциям p, q, r угловой скорости на оси, связанные с телом, а на опыте проверяется устойчивость по отношению к проекциям той же угловой скорости на неподвижные оси. По отношению к первым движение неустойчиво, а по отношению ко вторым оно устойчиво. Это следует из того, что после толчка неподвижный аксоид будет конусом с очень острым углом при вершине, а угол при вершине подвижного аксоида будет близок к π.

Этот пример иллюстрирует относительность понятия устойчивости: одно и то же движение может быть устойчивым и неустойчивым в зависимости от того, по отношению к каким величинам рассматривается устойчивость.

[6] Здесь речь идет только об условной устойчивости по отношению к углу Θ. Что же касается „направления" движения, определяемого углом ψ, то из уравнений

$$B_2 q - (G - ma^2) r_0 \delta = \varepsilon_1$$

и

$$q = \dot{\psi}$$

не следует, что угол ψ будет сколь угодно долго оставаться малым, а из этого следует, что „направление" прямолинейного движения диска изменится с течением времени.

Если выполнить указанный автором опыт (с монетой или колесом), то мы увидим, что точка прикосновения не будет описывать на плоскости прямолинейную траекторию, как это требуется условием задачи. Только при соблюдении особо подобранных начальных условий можно осуществить указанное авторами движение. Заметим, что функция ψ совсем не входит в уравнения движения, и потому говорить об устойчивости по отношению к этой функции нельзя.

[7] Устойчивость движения неуправляемого велосипеда определяется, главным образом, конструкцией вилки переднего колеса; если эта конструкция не удовлетворяет необходимым условиям, то никаким увеличением скорости нельзя добиться устойчивости движения.

Что касается движения управляемого велосипеда, то устойчивость его зависит от искусства велосипедиста, который может сохранить положение равновесия и при скоростях, значительно меньших указанных в тексте.

[8] В тексте встречаются различные выражения, называемые авторами работой приложенных импульсов. Чтобы избежать путаницы, заметим, что из уравнения

$$m_s \bar{v}_s^+ - m_s \bar{v}_s = I_s$$

следует

$$m_s \frac{\bar{v}_s^{+2}}{2} - m_s \frac{\bar{v}_s^{-2}}{2} = I_s \frac{\bar{v}_s^+ + \bar{v}_s^-}{2};$$

после суммирования найдем

$$\sum m_s \frac{\bar{v}_s^{+2}}{2} - \sum m_s \frac{\bar{v}_s^{-2}}{2} = \sum I_s \frac{\bar{v}_s^+ + \bar{v}_s^-}{2},$$

т. е. приращение живой силы системы равно сумме работ импульсов. Именно это выражение

$$\sum I_s \frac{\bar{v}_s^+ + \bar{v}_s^-}{2}$$

и будет в дальнейшем называться работой импульсов. Что же касается таких выражений, как

$$\sum \bar{I}_s \bar{v}_s^+ \text{ или } \sum \bar{I}_s \bar{v}_s^-,$$

то они также имеют размерность работы, но называются соответственно работой для состояния движения после удара и работой для состояния движения до удара. Следует помнить, что ни та, ни другая работа не равна изменению живой силы.

[9] Уравнения Лагранжа, относящиеся к импульсивному движению, применяются автором только для голономных систем, и в этом случае они имеют вид (стр. 510)

$$\Delta p_h = J_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где J_h — обобщенные импульсы.

Эта форма уравнений может быть сохранена и для неголономных систем, если под J_h подразумевать не только *приложенные* импульсы, но и импульсы реакций связей, как голономных так и неголономных.

Будем рассматривать удар как результат внезапного наложения новых связей на систему и предположим, что до удара система имела n степеней свободы. Пусть в момент наложения связей два каких-либо тела системы приходят в соприкосновение и две точки P_1 и P_2 этих тел, совпадающие в момент удара и имевшие различные скорости v_1^0 и v_2^0 до удара, получают после удара одну и ту же скорость $v = v_1 = v_2$.

Так как скорости точек P_1 и P_2 можно выразить линейно через $\dot{q}_h$, то можно предположить, что и составляющие этих скоростей по направлениям общей нормали к поверхностям тел (v_{n1} и v_{n2}) и составляющие в касательной плоскости (v_1', v_2', v_1'' и v_2'') также выражены через $\dot{q}_h$, а виртуальные перемещения этих же точек — через δq_h.

Обозначая через $N_1 = -N_2 = N$, $T_1' = -T_2' = T'$, $T_1'' = -T_2'' = -T''$ составляющие импульса реакции при ударе, найдем для виртуальной работы следующее выражение:

$$\delta A = \{ N(v_{n1} - v_{n2}) - T'(v_1' - v_2') - T''(v_1'' - v_2'') \} \delta t =$$
$$= \sum [N(a_{1h} - b_{1h}) - T'(a_{2h} - b_{2h}) - T''(a_{3h} - b_{3h})] \delta q_h.$$

Так как множители при δq_h как раз и являются обобщенными импульсами, то уравнения движения принимают вид

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\right) = N(a_{1h} - b_{1h}) - T'(a_{2h} - b_{2h}) - T''(a_{3h} - b_{3h}) \quad (h = 1, 2, \ldots, n). \quad \text{(а)}$$

К этим уравнениям надо добавить три уравнения связей:

$$\left.\begin{aligned} v_{n1} - v_{n2} &= (a_{11} - b_{11})\dot{q}_1 + (a_{12} - b_{12})\dot{q}_2 + \ldots + (a_{1n} - b_{1n})\dot{q}_n = 0, \\ v_1' - v_2' &= (a_{21} - b_{21})\dot{q}_1 + (a_{22} - b_{22})\dot{q}_2 + \ldots + (a_{2n} - b_{2n})\dot{q}_n = 0, \\ v_1'' - v_2'' &= (a_{31} - b_{31})\dot{q}_1 + (a_{32} - b_{32})\dot{q}_2 + \ldots + (a_{3n} - b_{3n})\dot{q}_n = 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(б)}$$

Раскрывая уравнения (а) и решая их совместно с уравнениями (б) относительно неизвестных $\dot{q}_1 \ldots \dot{q}_n$, N, T', T'', найдем, что обобщенные скорости в момент наложения связей $\dot{q}_h$ и импульс реакции наложенной связи определяются *линейно* через обобщенные скорости до удара и, в частности,

$$N = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad T' = \frac{\Delta'}{\Delta}, \quad T'' = \frac{\Delta''}{\Delta},$$

где Δ_n, Δ', Δ'', Δ — соответствующие определители.

Если касательные реакции возникают только благодаря трению между соприкасающимися поверхностями и если остаются верными законы трения Кулона при ударе, то связь будет обеспечена только в том случае, если

$$T'^2 + T''^2 < f^2 N^2$$

или

$$\Delta'^2 + \Delta''^2 < f^2 \Delta_n^2.$$

Так как Δ', Δ'', Δ_n определяются только через *начальные* обобщенные скорости, то можно проверить, будет ли это условие соблюдаться на самом деле.

Если окажется, что оно не соблюдается, то следует положить

$$T' = -\frac{v'}{v} f|N|, \quad T'' = -\frac{v''}{v} f|N|,$$

после чего уравнения (а) изменят свой вид, а из уравнений (б) следует сохранить только первое. Уравнения (а) и (б) позволяют определить скорости $\dot{q}_h$ в момент, когда наложенная связь осуществлена, и изменение скоростей $\dot{q}_h - \dot{q}_h^0$ за первую фазу удара.

Во второй фазе происходит восстановление формы деформированных тел и разрушение наложенной связи; при этом импульсы реакций или сохраняют свое значение, или уменьшаются.

Обозначая через k коэффициент восстановления, получим уравнения для второй фазы

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h'} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = k\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h^0}\right) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h'} = (1+k)\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - k\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_0} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

если $k = 1$ (абсолютно упругий удар),
то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = 2\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0}$$

и, следовательно,

$$\dot{q}_h' = 2\dot{q}_h + \dot{q}_0,$$

причем $\dot{q}_h$ определяются из уравнений (а) и (б).