§ 2. Точные уравнения равновесия холодных звезд

Рассмотрим вначале нерелятивистскую теорию политропных шаров Лейна–Эмдена. Система уравнений, описывающая структуру звезды, имеет вид

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho, \tag{13.I}$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \tag{14.I}$$

$$P = A\rho^{\gamma}, \quad \gamma \equiv 1 + \frac{1}{n}; \tag{15.I}$$

M_r – масса звезды, заключенная внутри сферы текущего радиуса r. Первое уравнение – это уравнение гидростатического равновесия, второе устанавливает связь M_r с плотностью ρ и третье – уравнение состояния. Разделив первое уравнение на ρ/r^2 и продифференцировав с подстановкой (15.I), получим

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = 4\pi G\rho. \tag{16.I}$$

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} &\rho = \rho_c \theta^n, \\ &r = a\xi, \\ &a = \left[\frac{(n+1)A\rho_c^{(1/n-1)}}{4\pi G}\right]^{1/2}, \end{aligned} \tag{17.I}$$

где $\rho = \rho_c$ при $r = 0$, т.е. центральная плотность звезды. В новых переменных получается уравнение Лейна–Эмдена

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\theta}{d\xi} = -\theta^n. \tag{18.I}$$

Граничное условие записывается в виде

$$\theta(0) = 1. \tag{19.I}$$

Для $n = 3$ аналитического решения нет. Но, как показал еще Эмден, регулярное решение для $n = 3$ существует, только если

$$\alpha \equiv \xi_1^2\,|\theta'(\xi_1)| \approx 2{,}01824. \tag{20.I}$$

Это позволяет найти точное значение чандрасекаровского предела. Действительно, полная масса звезды равна

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho\, dr = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi; \tag{21.I}$$

ξ_1 – безразмерный радиус звезды. Подставляя сюда (18.I), получим

$$M = 4\pi\left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{3/2} \rho_c^{\left(\frac{3-n}{2n}\right)} \alpha. \tag{22.I}$$

Для идеального, полностью релятивистского электронного газа (см. Зельдович и Новиков, 1971)

$$A = 1{,}2435 \cdot 10^{15} \text{ ед. СГС.} \tag{23.I}$$

Тогда из (22.I) получим

$$M_{\text{Ch}} \approx 1{,}457\left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 M_\odot. \tag{24.I}$$

Или в общем виде:

$$M_{\text{Ch}} \approx \frac{3{,}1}{\mu_e^2}\left[\frac{\hbar c}{2\pi G}\right]^{3/2}. \tag{25.I}$$

Учет релятивистских эффектов и твердотельного вращения изменяет это значение меньше, чем на несколько процентов (см. Тасуль, 1982). Существенно может изменить ситуацию дифференциальное вращение. Приближенные расчеты показывают, что чандрасекаровский предел может подняться до $\sim 3\,M_\odot$ (см. Острайкер и Боденхеймер, 1968).

Рассмотренная теория может быть применена лишь к достаточно "легким" нейтронным звездам, в которых нейтронный газ можно считать идеальным. Качественно ясно, что предельная масса нейтронной звезды может оказаться в такой модели еще меньше, чем в случае вырожденной электронной конфигурации: ведь релятивистские эффекты уменьшают устойчивость звезды. Так оно и получилось в расчетах Оппенгеймера и Волкова (1939).

Уравнение гидростатического равновесия с учетом общей теории относительности (уравнение Толмена–Оппенгеймера–Волкова):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2}\left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^2 P}{M_r c^2}\right)\left(1 - \frac{2GM_r}{rc^2}\right)^{-1}, \tag{26.I}$$

где M_r – по-прежнему текущая масса:

$$M_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r)\, dr. \tag{27.I}$$

Вместе с уравнением состояния

$$P = P(\rho) \tag{28.I}$$

и граничным условием

$$P(R_x) = 0 \tag{29.I}$$

уравнения (25.I) и (26.I) позволяют полностью рассчитать структуру невращающейся нейтронной звезды.

В уравнении (25.I) эффекты ОТО можно разбить на два вида. Во-первых, сказывается кривизна метрики и, во-вторых, давление вносит вклад в правую часть – давление "весит".

Главным препятствием при построении модели нейтронной звезды является незнание точной связи $P(\rho)$, в особенности при плотности больше ядерной. Естественно, что вид уравнения состояния существенно влияет на максимальную массу нейтронной звезды (предел Оппенгеймера–Волкова). Поэтому определение масс и радиусов нейтронных звезд по наблюдениям имеет фундаментальное значение для теории строения ядерной материи.

Прежде чем обсуждать современные представления о свойствах вещества внутри нейтронных звезд, приведем ряд аналитических решений уравнения Толмена для идеализированного уравнения состояния.

Для случая несжимаемой жидкости $\rho = \mathrm{const}$ и пока $P \ll \rho c^2$, предел Оппенгеймера–Волкова равен (см. Бречер и Капоризо, 1977)

$$M_{\mathrm{OV}} = \frac{c^3}{G^{3/2}} \left[\frac{3}{32\pi} \right]^{1/2} \rho_m^{-1} \approx 11{,}4 \left(\frac{\rho}{10^{14}\ \text{г/см}^3} \right)^{-1/2} M_{\odot}. \qquad (30.\mathrm{I})$$

Для ядерной плотности $\rho_{\mathrm{nucl}} = 3 \cdot 10^{14}$ г/см^3 максимальная масса нейтронной звезды оказывается $M_{\mathrm{OV}} \approx 6{,}6\, M_{\odot}$. Общая структура формулы (30.I) может быть получена из элементарных соображений. Гравитационная энергия нейтронной звезды составляет несколько десятков процентов от полной энергии: $GM^2/R \approx 0{,}1\, Mc^2$. Подставляя радиус из соотношения $M = (4/3)\ \pi R^3 \rho_{\mathrm{nucl}}$, получаем $M \sim c^3/(G^{3/2}\rho_{\mathrm{nucl}})$. Когда

$$P = \alpha \rho c^2, \qquad (31.\mathrm{I})$$

имеется точное аналитическое решение (Оппенгеймер и Волков, 1939; Мизнер и Заполый, 1964; Бречер и Капоризо, 1976)

$$\rho(r) = \frac{c^2}{G} \left[\frac{\alpha}{2\pi(\alpha^2 + 6\alpha + 1)} \right] r^{-2}. \qquad (32.\mathrm{I})$$

Хотя это решение обладает сингулярностью в центре $(r \to 0)$, масса звезды конечна:

$$M = \frac{c^3}{G^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + 6\alpha + 1} \right]^{3/2} \rho_m^{-1/2}, \qquad (33.\mathrm{I})$$

где ρ_m – так называемая "подгоночная" плотность, до которой еще известно уравнение состояния. Максимум достигается при $\alpha = 1$ и определяется максимальной плотностью ρ_m, при которой еще справедливы сделанные предположения об уравнении состояния вещества. Для более мягкого уравнения состояния

$$P = (\rho - \rho_m)\, c^2 \qquad (34.\mathrm{I})$$

и конечной центральной плотности решение представляет собой суперпозицию двух приведенных выше решений (см. Бречер и Капоризо, 1977). При этом масса звезды оказывается равной

$$M = (6\sqrt{2\pi})^{-1/2} (c^3/G^{3/2})\, \rho_m^{-1/2} \approx 3{,}0 \left(\frac{3 \cdot 10^{14}\ \text{г/см}^3}{\rho_m} \right)^{1/2} M_{\odot}. \qquad (35.\mathrm{I})$$

Напомним, что в приближении идеального вырожденного нейтронного газа предел Оппенгеймера–Волкова равен 0,8 $M_{\odot}$.

Все это прекрасно иллюстрирует зависимость минимальной массы нейтронной звезды от свойств вещества.