

находим, что напряженность результирующего магнитного поля на границе равна

$$\mathbf{B} = -\frac{3\mu}{R_0^3} \cos\theta \cdot \mathbf{e}_\theta. \quad (39.IV)$$

На полюсах сферы расположены две нейтральные точки, N_1 и N_2 ($B(\theta = \pm\pi/2) = 0$). Сравнивая (39.IV) с напряженностью дипольного поля, замечаем, что на магнитном экваторе напряженность магнитного поля возрастает в три раза по сравнению с невозмущенным значением.

Любопытное обстоятельство было подмечено В.Г.Корниловым. Сфера является точным решением задачи в том случае, когда частицы плазмы набегают с постоянными скоростями аксиально-симметрично по отношению к оси диполя. Действительно, давление невзаимодействующих друг с другом частиц определяется формулой Ньютона (31.IV), в которой $\chi = \theta$:

$$P = 2\rho v_\infty^2 \cos^2\theta.$$

Из условия равновесия (32.IV) находим

$$|B| = \sqrt{16\pi\rho_\infty v_\infty^2} \cos\theta. \quad (40.IV)$$

Сравнивая (39.IV) и (40.IV), получаем радиус магнитосферы:

$$R_m = \left(\frac{9\mu^2}{16\pi\rho_\infty v_\infty^2}\right)^{1/6} \quad (41.IV)$$

Если, согласно § 3 гл. III, ввести альвеновский радиус и условие

$$\frac{\mu^2}{8\pi R_A^6} = \rho_\infty v_\infty^2,$$

получим

$$R_m = \left(\frac{9}{2}\right)^{1/6} R_A \approx 1,28 R_A. \quad (42.IV)$$

Как видим, радиус магнитосферы отличается от грубой оценки альвеновского радиуса всего на 22%.

§ 4. Магнитосфера в случае сферически-симметричной аккреции

В последующих двух параграфах будет рассмотрена аккреция на замагниченную звезду, обладающую дипольным полем. Теперь форма границы магнитосферы не задается, но должна быть получена в ходе решения задачи. Качественно можно предугадать решение, используя задачу о диполе внутри сферы. Как мы видели в предыдущем параграфе, на сфере есть две нейтральные точки, в которых давление магнитного поля равно нулю. Следовательно, если на сферу будет действовать внешнее давление, оно

”прогнет” ее у полюсов. В результате полярный радиус магнитосферы станет меньше экваториального.

Конкретное решение задачи будет получено для двух случаев: столкновительного и бесстолкновительного. Вначале мы предположим, что аккрецируемое вещество бесстолкновительно и давление анизотропно. Рассмотрим радиальную аккрецию в приближении невзаимодействующих частиц. Пусть размер магнитосферы много меньше радиуса захвата: $R_A \ll R_G$. Эта задача была поставлена Иное и Хоши (1975). Пусть темп аккреции \dot{M} постоянен и частицы падают свободно, отдавая свой импульс на границе магнитосферы. Тогда давление, оказываемое аккрецируемой плазмой, равно

$$P = \rho v^2 \cos^2 \chi = \frac{\dot{M} \sqrt{2 GM_x}}{2 \pi} R^{-5/2} \cos^2 \chi. \quad (43.IV)$$

Здесь χ — по-прежнему угол между нормалью к границе и радиальным направлением. Альвеновский радиус рассматриваемой задачи есть

$$R_A = \left(\frac{\mu^2}{2 \dot{M} \sqrt{2 GM_x}} \right)^{2/7}. \quad (44.IV)$$

Для точного решения трехмерной задачи необходимо применять численные методы. В общем случае задача сводится к решению интегрального уравнения. Однако прежде чем приступить к численному решению, полезно понять, что же должно получиться.

Воспользуемся приближенным методом Берда (Мид и Берд, 1964), который позволяет свести задачу о поиске формы магнитосферы к решению обыкновенного дифференциального уравнения. В методе (точнее, в его первом приближении) используется своеобразный принцип локального зеркального отражения. Каждый малый участок магнитосферы можно считать приближенно плоским. А мы знаем, что вблизи плоскости (§ 3) возмущенное поле возрастает в два раза. Поэтому приближенно полагают, что напряженность искаженного магнитного поля примерно равна удвоенному дипольному полю в той же точке:

$$\mathbf{B} = 2 \mathbf{B}_d. \quad (45.IV)$$

Это приближенное равенство, подставленное в условие равновесия (32.IV), запишем в векторной форме:

$$|\mathbf{n}_s \times \mathbf{B}| = -\sqrt{8 \pi P} \mathbf{n}_s \mathbf{n}_v = \sqrt{8 \pi P} \cos \chi; \quad (46.IV)$$

\mathbf{n}_v — единичный вектор вдоль направления скорости движения. Единичный вектор нормали \mathbf{n}_s , очевидно, может быть записан в виде

$$\mathbf{n}_s = \left(\mathbf{e}_r - \frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta} \mathbf{e}_\theta \right) / \sqrt{1 + \left(\frac{dR}{R d\theta} \right)^2}. \quad (47.IV)$$

Введем обозначение:

$$r \equiv \frac{R}{R_A}.$$

Тогда получим приближенное дифференциальное уравнение в виде

$$\cos \theta - 2 \sin \theta \frac{dr}{rd\theta} = \frac{1}{2} r^{7/4}. \quad (48.IV)$$

При выводе уравнения было использовано очевидное соотношение

$$\cos \chi = \left[1 + \left(\frac{dr}{rd\theta} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (49.IV)$$

Уравнение сразу позволяет определить экваториальный радиус магнитосферы.

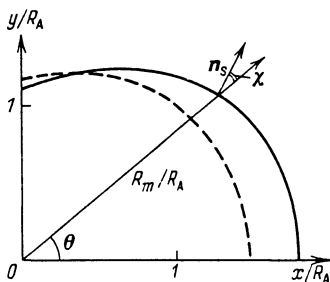


Рис. 48. Форма магнитосферы, рассчитанная методом Берда (штриховая линия) и вариационным методом в случае радиальной аккреции с ньютоновским законом давления (бесстолкновительный газ)

Действительно, из соображений симметрии следует, что при $\theta = 0$ должно быть $dr/d\theta = 0$. Отсюда имеем

$$R_e = 2^{4/7} R_A \approx 1,49 R_A. \quad (50.IV)$$

Введем так называемый коэффициент усиления k_m , который показывает, насколько сильно искажается магнитное поле аккрецируемой плазмой:

$$k_m = \left(\frac{B}{B_d} \right) \text{ на экваторе.} \quad (51.IV)$$

Для плоскости $k_m = 2$, для сферы $k_m = 3$. В рассмотренном приближенном решении $k_m = 2^{12/7} \approx 3,28$. Это вполне естественно, так как кривизна поверхности больше, чем в случае сферы. Решение уравнения приведено на рис. 48.

Для решения точной задачи об отыскании формы магнитосферы Земли был предложен метод моментов (Мидгли и Дэвис, 1962). Идея метода состоит в следующем. Задав давление на границе магнитосферы в функциональном виде $P(r, \chi)$, мы тем самым, согласно уравнению (27.IV), задаем значение поверхностных токов в виде $J(r, \chi)$, т.е. в зависимости от формы поверхности. Далее мы должны "подобрать" такую форму поверхности, чтобы все мультипольные моменты (выше дипольного по порядку) обратились в нуль, а дипольный момент равнялся бы дипольному моменту звезды, взятому с обратным знаком. В результате получится система интегральных уравнений, для решения которой нужно задать форму поверхности в виде ряда. "Камнем преткновения" здесь оказался прогиб полярного каспа. В принципе можно было бы предположить, что вдоль магнитной оси магнитосфера продавливается до самого диполя.

Тогда можно было бы "пропускать" аккрецируемое вещество прямо на магнитные полюса вдоль полярных каналов. Именно такую форму магнитосферы заложили "руками" Иное и Хоши (1975). А поскольку полярная область дает малый вклад в мультипольные моменты низких порядков, численная задача сходилась. Однако такая топология оказалась ошибочной. В этом нас убеждает, с одной стороны, точное двумерное решение (см. дальше), а с другой – решение задачи вариационным методом.

Чтобы избежать произвола в выборе вида ряда, аппроксимирующего форму поверхности, нами был развит вариационный метод. Идея метода была предложена Маджурой и Каровиляном (1962). Они показали, что энергия, которую необходимо затратить, чтобы "обжать" диполь произвольной замкнутой поверхностью, равна

$$U = -\frac{1}{2} \mu \cdot B(0) \cdot e_{\mu}, \quad (52.IV)$$

где $B(0)$ – напряженность магнитного поля, создаваемого токами, текущими по магнитосфере в точке диполя. В случае аккреции эту работу по "обжатию" диполя совершает гравитационное поле.

Очевидно, устойчивая поверхность соответствует минимуму энергии U . Варьируя выражение (52.IV), получим соответствующее уравнение Эйлера, которое и является дифференциальным уравнением для границы магнитосферы:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{d}{d\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{r}} = 0, \quad (53.IV)$$

причем мультипольные моменты, создаваемые токами, удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} I_1 &= 4, \\ I_j &= 0, \quad \text{где } j = 2i + 1, i > 0. \end{aligned} \quad (54.IV)$$

В (53.IV) $\dot{r} \equiv dr/d\theta$; I_j – мультипольные моменты токов, текущих по магнитосфере. Берутся только нечетные моменты, поскольку в силу симметрии магнитосферы относительно магнитного экватора четные обращаются в нуль автоматически. Для рассматриваемого вида давления (43.IV) функция Φ имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{2} r^{-5/4} \cos^2 \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r^{n+3/4} P_n^1(\sin \theta), \quad (55.IV)$$

где λ_n – неопределенный множитель Лагранжа, P_n^1 – присоединенные полиномы Лежандра (Корн и Корн, 1970). Так как $\partial \Phi / \partial \dot{r} = 0$, то уравнение Эйлера приобретает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0. \quad (56.IV)$$

Решая его, получаем точное уравнение границы магнитосферы в виде

$$\frac{8}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(n + \frac{3}{4} \right) r^{n+2} P_n^1(\sin \theta) = \cos \theta, \quad (57.IV)$$

$$I_i = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^{i+3/4} P_i^1(\sin \theta) \cos \theta d\theta. \quad (58.IV)$$

Примем:

$$I_1 = 4,$$

$$I_j = 0, \text{ где } j = 2i + 1, i > 0.$$

$$(59.IV)$$

Решение системы (57.IV), (58.IV) и (59.IV) проведено нами численно и представлено на рис. 48.

Выпишем ряд полезных соотношений. Умножим уравнение (57.IV) на $(1/2)r^{-5/4} \cos \theta$ и проинтегрируем по θ :

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^{-5/4} \cos^2 \theta d\theta = \frac{4}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(n + \frac{3}{4} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^{n+3/4} P_n^1(\sin \theta) \cos \theta d\theta.$$

$$(60.IV)$$

Левая часть есть не что иное, как величина напряженности магнитного поля, создаваемого токами, текущими по магнитосфере в точке диполя (в единицах $b(0) = B(0)/(\mu^2/R_A^3)$). Интеграл в правой части равен мультипольному моменту I_n . Следовательно, получаем

$$b(0) = \frac{4}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(n + \frac{3}{4} \right) I_n.$$

Так как по условию $I_n = 0$ при $n > 1$, а $I_1 = 4$, то напряженность поля внешних токов в точке диполя равна

$$B(0) = \frac{28}{5} \lambda_1 \frac{\mu^2}{R_A^3}.$$

В принципе вариационный метод можно использовать последовательно. Потребуем в первом приближении только, чтобы $I_1 = 4$, а на более высокие мультипольные моменты не будем накладывать никаких ограничений. Это равносильно тому, что $\lambda_i = 0$ при $i > 1$. Тогда из уравнения (57) получим, что в первом приближении магнитосфера представляет собой сферу радиуса

$$r_m = \left(\frac{8}{\pi} \right)^{4/7} \approx 1,72.$$

Это очень близко к значению экваториального радиуса в точном решении $r_e \approx 1,78$ (см. рис. 48).

Физический смысл множителей Лагранжа состоит в том, что они характеризуют скорость уменьшения энергии U или $b(0)$ при изменении мультипольного момента I_i (Зельдович и Мышкис, 1972). Полученное решение показывает, что "дыра" в магнитосфере не образуется.