

§ 5. Паскалевский закон давления

Теперь будем считать, что движение частиц плазмы вблизи магнитосферы изотропизировано вследствие столкновений и/или хаотических магнитных полей и давление в ней подчиняется закону Паскаля. Тогда остается только зависимость давления от радиуса, которую мы задаем в степенном виде:

$$P = P_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-n}. \quad (61.IV)$$

Приведем примеры нескольких физических ситуаций, в которых реализуется степенной закон. Один из важнейших случаев, кстати, рассмотренных впервые Колом и Хазом (1959), — это случай $n = 0$: диполь погружен в однородную плазму с давлением $P = P_0 = \text{const}$. В рамках проведенной в предыдущей главе классификации этот случай соответствует режиму георотатора $R_G < R_A$. При этом скорость движения звезды относительно среды v_∞ гораздо меньше скорости звука в ней: $v_\infty \ll a_\infty$. Под альвеновским радиусом следует понимать величину

$$R_A = \left(\frac{\mu^2}{8\pi P_0 R_0^n} \right)^{\frac{1}{6-n}}. \quad (62.IV)$$

Если альвеновский радиус $R_A \lesssim R_G$ и реализуется сферически-симметричная аккреция, то при соударении с магнитосферой образуется ударная волна, давление за фронтом которой порядка динамического давления в плазме (16.II):

$$P = \rho v^2 = \frac{\dot{M} \sqrt{2GM_x}}{4\pi} R^{-5/2}, \quad (63.IV)$$

что совпадает с (61.IV) при $n = -5/2$. Интересно, что аналогичная зависимость давления от расстояния возникает в том случае, когда вокруг магнитосферы существует медленно оседающая или статическая плазменная атмосфера. Пренебрежем членом $v \nabla v$ в уравнении Эйлера (2.II). Тогда

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dR} = - \frac{GM_x}{R^2}.$$

Подставляя сюда уравнение состояния $P = P_0 (\rho/\rho_0)^\gamma$, имеем

$$P = P_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (64.IV)$$

где $R_0 = GM_x \rho_0 (\gamma - 1)/(\gamma P_0)$.

Следовательно, в атмосфере закон давления степенной с показателем n , равным

$$n = \frac{\gamma}{\gamma - 1}. \quad (65.IV)$$

Для адиабатической атмосферы $\gamma = 5/3$ и $n = 5/2$, для изотермической — $n = \infty$ и для $\gamma = 4/3$ — $n = 4$.

Решение задачи о форме границы магнитосферы начнем с модельных двумерных задач.

Двумерные решения. Как правило, расчет трехмерной задачи требует численного счета на ЭВМ. При этом получаемое решение не всегда точно, например, в особых точках. С другой стороны, двумерные аналоги трехмерных задач качественно сохраняют все черты трехмерного решения и могут быть получены в аналитическом виде.

Особенно эффективным оказывается метод конформных отображений. Он позволяет получить решение в удобном для анализа аналитическом виде

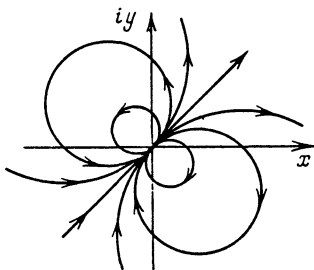


Рис. 49. Двумерный диполь в комплексной плоскости

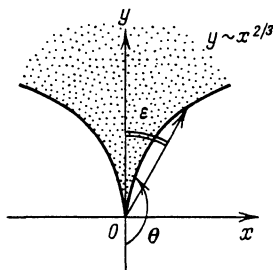


Рис. 50. Касп – точка ветвления силовых линий

и отличается от численных трехмерных решений не более чем на несколько десятков процентов.

Метод конформных отображений широко применяется в гидродинамике, электростатике, теории деформации (см. Лаврентьев и Шабат, 1973). Однако рассмотренные здесь задачи идеологически несколько отличаются от стандартных задач, например, в гидродинамике. В гидродинамике, как правило, задача формулируется так: при некоторой заданной границе течения требуется определить поле течения. При поиске структуры магнитосферы задается не граница (ее необходимо найти), а некоторое функциональное условие на ней (выраженное в виде равенства магнитного и внешнего давлений). Это, конечно, усложняет решение задачи.

Рассмотрим комплексную плоскость $z = x + iy$ (рис. 49). В начале координат расположен двумерный диполь с магнитным дипольным моментом d . Напомним, что напряженность плоского диполя падает по квадратичному закону: $|B| \sim R^{-2}$. Пусть диполь окружен плазмой с изотропным давлением (61.IV). Возникает двумерный аналог альвеновского радиуса:

$$R_A^{(2)} = \left(\frac{d^2}{8\pi P_0 R_0^n} \right)^{\frac{1}{4-n}}. \quad (66.IV)$$

Решение задачи сводится к отысканию вида конформного отображения из области с известной структурой поля на искомую. Очевидно, следует искать решение лишь для $n \leq 4$, в противном случае магнитосфера глобально неустойчива – внешнее давление нарастает при приближении к диполю быстрее, чем магнитное давление.

Выпишем ряд решений. Случай однородного давления $n = 0$ приводит к формированию границы, определяемой следующей параметрической системой (Кол и Хаз, 1959):

$$R \cos \theta = R_A^{(2)} \left[\sin \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3} \sin \frac{3\varphi}{2} \right], \quad (67.IV)$$

$$R \sin \theta = R_A^{(2)} \left[\cos \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\varphi}{2} \right].$$

Решение ищется для первого квадранта – в остальных оно получается симметричным отображением.

Как показали Элснер и Лэмб (1976), наиболее близким к трехмерному случаю $n = 5/2$ является случай $n = 2$. Решение имеет вид

$$R = R_A^{(2)} \exp \left(\frac{\cos 2\varphi}{2} \right), \quad (68.IV)$$

$$\theta = \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi.$$

В первой четверти $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Как видим, полярное расстояние не обращается в нуль,

$$R_p = \frac{R_A}{\sqrt{e}},$$

и больше экваториального в e раз.

Особый интерес представляет полярная область магнитосферы – ее называют полярным каспом. Касп представляет собой особую точку дифференциального уравнения Лежандра, описывающего скалярный потенциал двумерного магнитного поля. В каспе происходит ветвление полярной силовой линии (рис. 50) на две. Очевидно, поведение магнитного поля вблизи каспа и его форма не зависят от типа магнитосферы (т.е. не зависят от n). Это совершенно ясно, так как поиск формы каспа на произвольной магнитосфере сводится к следующей задаче: определить магнитное поле и форму границы "плазма – поле" вблизи точки ветвления изначально однородного поля, помещенного в однородную плазму. (Ведь давление плазмы в малой окрестности данной точки всегда можно считать постоянным).

Форму каспа найдем, например, из решения (68.IV) для случая $n = 2$. Разложим решение вблизи точки ветвления (рис. 50) и получим

$$\varphi = \frac{R_p^{-5/4}}{4B_p} \epsilon^2, \quad y = \text{const} \cdot x^{2/3}, \quad (69.IV)$$

где B_p – напряженность магнитного поля в точке ветвления:

$$B_p = P_0 \left(\frac{R_p}{R_0} \right)^{-2}.$$

Силовые линии сходятся в точке ветвления с бесконечной производной ($dy/dx \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$). Это обстоятельство является решающим. Если бы

силовые линии сходились с конечным углом, то напряженность магнитного поля в них обращалась бы в нуль — особая точка была бы нейтральной. Однако существование нейтральной точки противоречило бы условию равновесия на границе магнитосферы (27.IV).

В окрестности каспа поле не равно нулю. Как показали Морозов и Соловьев (1966), такую же форму имеет касп и в трехмерном случае.

Пространственные решения. Граница магнитосферы в трехмерном случае была рассчитана методом моментов численно Аронсом и Ли (1976а) для случая, когда динамическое давление меняется по степенному закону

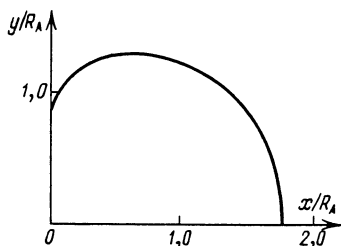


Рис. 51. Численный расчет пространственной задачи о форме границы магнитосферы для паскалевского закона давления в плазме

$n = 5/2$. Уравнение поверхности вдали от каспов искалось в виде ряда

$$R(\theta) = R_e \left[1 + \sum_{k=1}^N c_k \left(\frac{2\theta}{\pi} \right)^{2k} \right], \quad (70.IV)$$

а в окрестности каспов это решение сшивалось с решением Морозова и Соловьева (1966):

$$R = R(\theta) + S \left(1 - 2 \frac{|\theta|}{\pi} \right)^{2/3}, \quad (71.IV)$$

где S — некоторая постоянная. Результаты расчета коэффициентов c_k приведены в работе Аронса и Ли (1976а), а форма границы поверхности — на рис. 51. Экваториальный и полярный радиусы оказались равны

$$R_e \approx 1,78 R_A,$$

$$R_p \approx R_A.$$

Сравнивая с двумерным решением Элснера и Лэмба (68.IV), где $R_e = \sqrt{e} R_A \approx 1,65 R_A$, видим, что отличие невелико (но сколь велико различие в затратах на полученное решение!).

В серии работ Мичел (1977а, б) рассмотрел задачу аналитически и нашел интегральное уравнение, численное решение которого дает форму границы для любого $n \leq 6$. Мичел (1977а) нашел простое аналитическое решение для случая $n = 6$:

$$R = R_e \cos \theta. \quad (72.IV)$$

Магнитосфера оказалась продавленной до диполя. Следует подчеркнуть, что случай $n = 6$, во-первых, является вырожденным — давление плазмы растет так же, как и давление магнитного поля, а во-вторых, соответствует весьма специфическому уравнению состояния $\gamma = 6/5$ (см. формулу (65.IV)).

Наконец, отметим численный расчет для случая $n = 0$, проведенный Мидгли и Дэвисом (1962). Подчеркнем, однако, что вблизи каспа их решение неверно, так как они не учитывали тот факт, что вблизи точки ветвления разложение векторного потенциала содержит не только целые, но и полуцелые полиномы Лежандра.

§ 6. Диполь, обжатый идеально проводящим диском

Перейдем теперь к рассмотрению другого предельного случая — дисковой аккреции на замагниченную нейтронную звезду. Впервые дисковая аккреция на замагниченную нейтронную звезду была рассмотрена Принглом и Рисом (1972). Взаимодействие диска с магнитным полем звезды рассматривалось качественно и было отмечено, что диск должен разрушаться магнитными силами на расстояниях порядка альвеновского радиуса. Анализ структуры магнитного поля в случае дисковой аккреции впервые был проведен в работах Липунова (1978а, б), Шарлемана (1978) и Гоша и Лэмба (1978). Шарлеман (1978) рассмотрел модель, в которой аккреционный диск был заменен кольцевым током, и уделил основное внимание выяснению роли различных магнитогидродинамических неустойчивостей. Гош и Лэмб (1978) рассмотрели идеализированную модель, в которой магнитная ось звезды, ось вращения и ось диска совпадают друг с другом. При этом они попытались учесть магнитогидродинамическое взаимодействие звезды с диском. В работах Липунова (1978а, б) была рассмотрена модель, в которой ось диска и магнитная ось звезды не совпадают друг с другом. При этом выяснялась глобальная структура магнитного поля, а диск считался идеально проводящим. Анзер и Бернер (1980) рассмотрели случай, когда ось диполя лежит в плоскости аккреционного диска.

Стандартная модель дисковой аккреции (гл. II) показывает, что в докритическом режиме толщина диска гораздо меньше его радиуса:

$$\frac{H}{R} \approx \frac{a_s}{v_\phi} \ll 1.$$

Интуитивно ясно, что при отыскании структуры магнитосферы и ее формы толщина диска оказывается не очень важной (характерный масштаб по z -координате исчезает). Поэтому в качестве первого приближения задачу можно свести к диполю, обжатому идеально проводящим бесконечно тонким диском (Липунов, 1978а, б).

Двумерная модель. Определим структуру магнитного поля для двумерного аналога дисковой аккреции, следуя работе Липунова (1978а, б). Будем считать, что диск а) бесконечно тонкий и идеально проводящий, б) внутренняя граница диска расположена на расстоянии a от диполя. На рис. 52 диск показан в виде двух разрезов в комплексной плоскости $z = x + iy$ вдоль действительной оси: $|x| \geq a$. В начале координат расположен диполь с моментом d , направленный под углом ψ к магнитной оси. Рассматриваемая задача значительно проще предыдущих, поскольку граница "магнитосферы" задана заранее. Поэтому не составляет труда отобразить данную область на некоторую простую область, где решение задачи известно (см. Лаврентьев и Шабат, 1973). В качестве области с известным решением вы-