

Наконец, отметим численный расчет для случая $n = 0$, проведенный Мидгли и Дэвисом (1962). Подчеркнем, однако, что вблизи каспа их решение неверно, так как они не учитывали тот факт, что вблизи точки ветвления разложение векторного потенциала содержит не только целые, но и полуцелые полиномы Лежандра.

§ 6. Диполь, обжатый идеально проводящим диском

Перейдем теперь к рассмотрению другого предельного случая — дисковой аккреции на замагниченную нейтронную звезду. Впервые дисковая аккреция на замагниченную нейтронную звезду была рассмотрена Принглом и Рисом (1972). Взаимодействие диска с магнитным полем звезды рассматривалось качественно и было отмечено, что диск должен разрушаться магнитными силами на расстояниях порядка альвеновского радиуса. Анализ структуры магнитного поля в случае дисковой аккреции впервые был проведен в работах Липунова (1978а, б), Шарлемана (1978) и Гоша и Лэмба (1978). Шарлеман (1978) рассмотрел модель, в которой аккреционный диск был заменен кольцевым током, и уделил основное внимание выяснению роли различных магнитогидродинамических неустойчивостей. Гош и Лэмб (1978) рассмотрели идеализированную модель, в которой магнитная ось звезды, ось вращения и ось диска совпадают друг с другом. При этом они попытались учесть магнитогидродинамическое взаимодействие звезды с диском. В работах Липунова (1978а, б) была рассмотрена модель, в которой ось диска и магнитная ось звезды не совпадают друг с другом. При этом выяснялась глобальная структура магнитного поля, а диск считался идеально проводящим. Анзер и Бернер (1980) рассмотрели случай, когда ось диполя лежит в плоскости аккреционного диска.

Стандартная модель дисковой аккреции (гл. II) показывает, что в докритическом режиме толщина диска гораздо меньше его радиуса:

$$\frac{H}{R} \approx \frac{a_s}{v_\phi} \ll 1.$$

Интуитивно ясно, что при отыскании структуры магнитосферы и ее формы толщина диска оказывается не очень важной (характерный масштаб по z -координате исчезает). Поэтому в качестве первого приближения задачу можно свести к диполю, обжатому идеально проводящим бесконечно тонким диском (Липунов, 1978а, б).

Двумерная модель. Определим структуру магнитного поля для двумерного аналога дисковой аккреции, следуя работе Липунова (1978а, б). Будем считать, что диск а) бесконечно тонкий и идеально проводящий, б) внутренняя граница диска расположена на расстоянии a от диполя. На рис. 52 диск показан в виде двух разрезов в комплексной плоскости $z = x + iy$ вдоль действительной оси: $|x| \geq a$. В начале координат расположен диполь с моментом d , направленный под углом ψ к магнитной оси. Рассматриваемая задача значительно проще предыдущих, поскольку граница "магнитосферы" задана заранее. Поэтому не составляет труда отобразить данную область на некоторую простую область, где решение задачи известно (см. Лаврентьев и Шабат, 1973). В качестве области с известным решением вы-

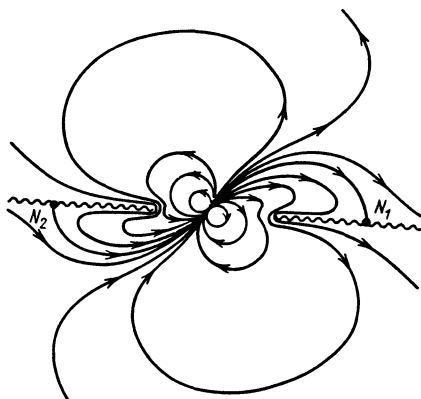
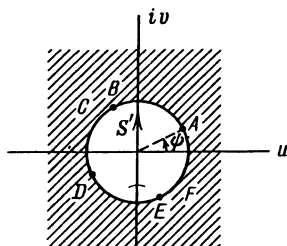
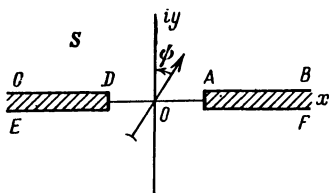


Рис. 52. Двумерная модель диска и отображение ее на внутренность единичного круга. Плоскость S отображается на внутренность круга S' ; символами A, B, C, D, E и F показано соответствие точек при конформном отображении. Стрелкой показан вектор дипольного момента

Рис. 53. Диполь, обжатый идеально проводящим диском. По результатам решения двумерной задачи (Липунов, 1978а, б)

берем единичный круг в комплексной плоскости $\xi = u + iv$, в котором направление диполя совпадает с направлением магнитной оси. Конформное отображение, переводящее область с выброшенными отрезками во внутренность единичного круга, имеет вид

$$z = \frac{2\xi e^{-i\psi} a}{1 + \xi^2 e^{-2i\psi}}. \quad (73.IV)$$

Соответствие точек при конформном отображении указано на рис. 52. Напряженность магнитного поля в любой точке равна

$$\mathbf{B} = B_x + iB_y = \frac{dW(\xi)}{d\xi} \cdot \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^{-1} \quad (74.IV)$$

А вдоль диска (вдоль разрезов) имеем

$$\mathbf{B} = B_x \pm \frac{d}{a^2} \left[-\frac{a^3}{x^3 \sqrt{1 - (a/x)^2}} \cos \psi \pm \left(\frac{a}{x}\right)^2 \sin \psi \right]. \quad (75.IV)$$

Выражение выписано для "правого" (см. рис. 52) разреза, причем знаки "+" и "-" соответствуют напряженности поля "сверху" и "снизу" от разреза. Смысл полученного выражения ясен: первый член представляет собой поле токов, текущих по диску, а второй — поле диполя.

На рис. 53 приведена качественная картина для силовых линий полученного решения.

Отметим следующие важные характерные черты глобальной структуры магнитного поля:

1. Вблизи внутреннего края диска ($x = \pm a$) напряженность магнитного поля обладает особенностью (хорошо известной из электродинамики — см., например, Ландау и Лифшиц, 1982, с. 44):

$$|B(x \rightarrow a)| \sim \Delta^{-1/2}, \quad (76.IV)$$

где Δ — расстояние от внутреннего края.

2. Когда ось диполя направлена вдоль оси диска ($\psi = 0$), структура магнитного поля приобретает квазиквадрупольный характер:

$$|B| \sim \frac{1}{x^3}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (77.IV)$$

3. Наоборот, когда диполь лежит в плоскости диска, дипольное поле не искажается вообще.

4. На диске имеются две нейтральные точки, N_1 и N_2 , в которые "входят" полярные силовые линии и в которых напряженность магнитного поля обращается в нуль. Из условия $B_x = 0$ находим, что расстояние от диполя до нейтральных точек равно

$$x_{1,2} = \pm \frac{a}{\sin \psi}. \quad (78.IV)$$

5. Со стороны магнитного поля к диску приложен момент сил, стремящийся развернуть диск вдоль магнитной оси диполя. Это следует из расчета момента сил с помощью формул Чаплыгина — Блазиуса (Липунов, 1978а), который дает следующее выражение для момента сил:

$$K = \frac{d^2}{2a^2} \sin 2\psi. \quad (79.IV)$$

Полученный результат качественно ясен из энергетических соображений. Хотя в обоих положениях, $\psi = 0$ и $\psi = \pi/2$, момент сил равен нулю, положение $\psi = \pi/2$ энергетически более выгодно: ведь магнитное поле при этом практически не искажается, следовательно, и затраты энергии на создание такой ситуации минимальны. (Диск входит как "нож в масло".)

Здесь имеется интересное сопоставление с гидродинамикой идеальной несжимаемой жидкости, указанное Н.И. Шакурой. Хорошо известно (Лаврентьев и Шабат, 1973), что двумерная гидромеханика аналогична магнито-статике. Силовые линии магнитного поля можно сопоставить с линиями тока в жидкости. Однако следующий пример указывает на важное отличие гидромеханики от магнитостатики.

Рассмотрим две пластинки в потоке жидкости и в магнитном потоке (рис. 54), расположенные под углом к направлению потоков. Структуры силовых линий и линий тока полностью идентичны в обоих случаях (пластинки идеально проводящие и не создают трения). Равнодействующая сил, приложенных к обеим пластинкам, равна нулю (парадокс Д'Аламбера), а вот момент сил в обоих случаях — разного знака. В жидкости пластинка разворачивается поперек потока (это легко проверить экспериментально в домашних условиях), а в магнитном поле — вдоль. Различие связано с тем, что в гидромеханике существует интеграл Бернулли (давление максимально там, где минимальна скорость). Давление же магнитного

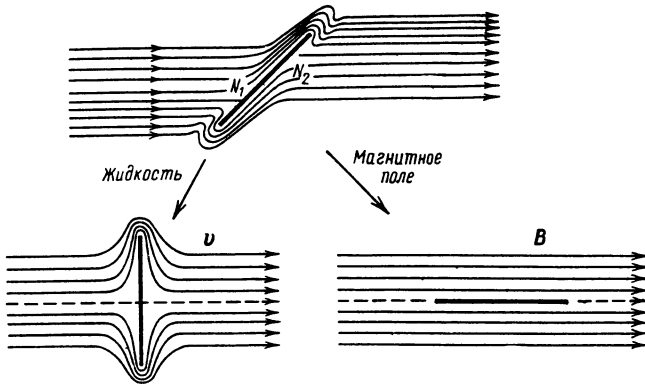


Рис. 54. Пластика, помещенная в поток идеальной жидкости или магнитного поля, ведет себя по-разному

поля пропорционально его напряженности: $\sim B^2/8\pi$. В нейтральных точках N_1 и N_2 (рис. 54) скорость и напряженность обращаются в нуль. А вот давление обращается в нуль только в магнитном поле, в жидкости же оно максимально. Ясно, как будет разворачиваться пластинка.

Пространственная задача. Результаты, полученные в предыдущем пункте, легко обобщаются на трехмерный случай (Липунов, 1978а, б). Пусть идеально проводящий диск имеет радиус внутренней границы R_d . Тогда обобщение на пространственный случай производится заменой $d \rightarrow \mu$, $a \rightarrow R_d$ и изменением степеней в соответствии с размерностью. Можно предсказать следующие свойства трехмерного решения.

1. Вблизи внутреннего края диска характер особенности не изменится:

$$|B(R \rightarrow R_d)| \sim B_d \left(\frac{R_d}{\Delta} \right)^{1/2}, \quad (80.IV)$$

где B_d — напряженность дипольного поля в том же месте.

2. На больших расстояниях от внутреннего края структура поля напоминает квадруполь:

$$B(R \gg R_d) \sim R^{-4}. \quad (81.IV)$$

3. Когда магнитная ось диполя лежит в плоскости диска, структура дипольного поля не искажается.

4. Расстояние нейтральных точек на диске от диполя примерно равно:

$$R_{1,2} \approx \frac{R_d}{\sin \psi}. \quad (82.IV)$$

5. Магнитное поле стремится развернуть диск вдоль магнитной оси, причем момент сил можно оценить по формуле

$$K = \frac{\mu^2}{2R_d^3} \sin 2\psi. \quad (83.IV)$$

Особенность у внутреннего края диска есть следствие предположения о его бесконечно малой толщине. В приближении конечной толщины H мы

можем из (80.IV) получить следующую оценку:

$$B(R = R_d) \approx B_d \left(\frac{R_d}{H} \right)^{1/2}. \quad (84.IV)$$

Особенность эта не слишком сильная, так что общая энергия, необходимая для удержания диска вокруг диполя, конечна:

$$U \sim \int_V \left(\frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_d^2}{8\pi} \right) dV.$$

Действительно, край диска дает малый вклад в эту энергию:

$$\int \frac{B^2}{8\pi} R_d \Delta d\Delta \sim \int \frac{B_d^2}{8\pi} \left(\frac{R_d}{\Delta} \right) \Delta d\Delta \sim \Delta.$$

Отсюда ясно, что сила, выталкивающая аккреционный диск, конечна. В этом месте рассмотренная модель сильно отличается от упрощенной модели Шарлемана (1978), в которой диск был заменен токовым кольцом. В последнем случае поле у внутреннего края имеет гораздо более сильную особенность: $B \sim \Delta^{-1}$.

Результаты, полученные обобщением двумерного решения, полностью подтвердились точным расчетом пространственной задачи Али (1980) и

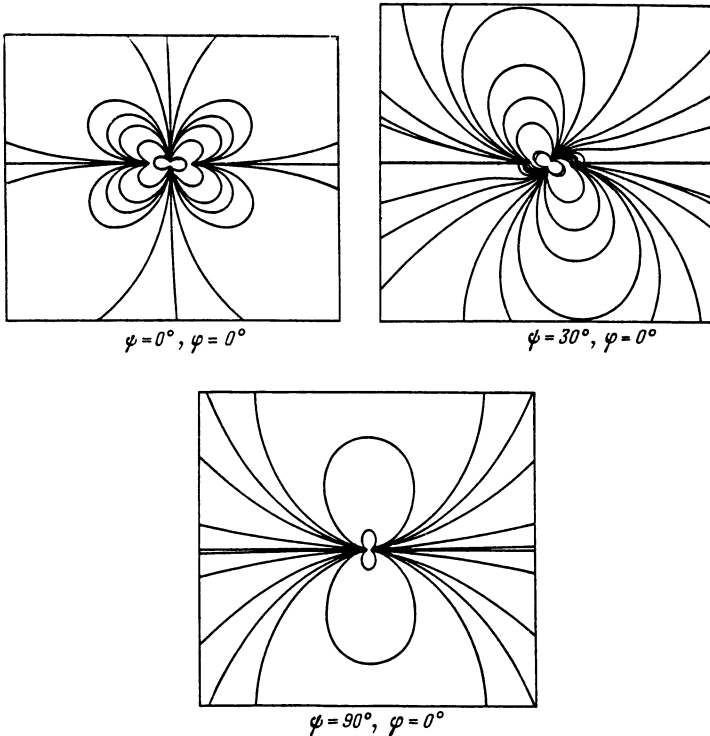


Рис. 55. Точная картина силовых линий, построенная по результатам решения пространственной задачи (Кундт и Робник, 1980)

исправлением некоторых неточностей трехмерного решения Кундтом и Робником (1980). Решение этой задачи довольно громоздко, и здесь мы опишем основные результаты. На рис. 55 показана картина силовых линий при разных углах наклона оси диполя к плоскости диска.

Положение нейтральных точек на диске, определяемое из условия $B = 0$, находится из выражения

$$R_{1,2} = R_d \sqrt{\left[1 + \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \psi \right)^2 \right]}, \quad (85.IV)$$

которое совпадает с выражением (82.IV), если $2/\pi$ заменить на 1. Полный момент сил, приложенных к диску со стороны магнитного поля, равен

$$K = \frac{4}{3\pi} \frac{\mu^2}{R_d^3} \sin 2\psi. \quad (86.IV)$$

Множитель $4/3\pi \approx 0,42$ близок к 0,5 в формуле (83.IV). Сравнение обоих решений было проведено Липуновым и Шакурой (1980) и Кундтом и Робником (1980).

Учет вращения диполя. В рассматриваемом сейчас приближении идеально проводящего диска легко учесть вращение диполя в области $R \ll R_1$ (R_1 — по-прежнему радиус светового цилиндра). Глубоко внутри светового цилиндра электрические поля малы и результирующая картина получается путем вращения магнитостатической картины вокруг оси вращения. Для процессов, протекающих гораздо медленнее, чем вращение нейтронной звезды, важна усредненная картина. Из теории дисковой аккреции (гл. II) следует, что самым большим характерным временем является время радиального движения в веществе в диске:

$$t_r \approx \frac{R}{v_r} \approx \frac{1}{\alpha} t_{ff} \left(\frac{R}{H} \right) \approx \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R}{R_c} \right)^{3/2} \left(\frac{R}{H} \right) p, \quad (87.IV)$$

где α — параметр турбулентности в диске, R_c — радиус коротации, p — период вращения нейтронной звезды. Видно, что если $R \lesssim R_c$, то $t_r \gg p$. Следовательно, диск будет воспринимать усредненную по периоду вращения картину магнитного поля.

Усредним по периоду вращения момент сил, приложенных к диску со стороны магнитного поля, следуя работе Липунова и Шакуры (1980). Момент сил, приложенных к кольцу диска толщиной dR на расстоянии R , в точном трехмерном решении равен

$$dK = \frac{4\mu^2 dR}{\pi R^4 (R^2/R_d^2 - 1)} (\mathbf{n}_m \mathbf{n}_d) [\mathbf{n}_m \times \mathbf{n}_d], \quad (88.IV)$$

где \mathbf{n}_m и \mathbf{n}_d — единичные векторы, направленные соответственно вдоль диполя и вдоль оси диска.

Рассмотрим самый общий случай, когда все три оси — ось диполя, ось вращения и ось диска — не совпадают друг с другом (рис. 56). Пусть α_0 — угол между осью вращения и осью диска, β — угол между осью вращения и магнитной осью звезды. Введем единичные векторы: \mathbf{n}_ω вдоль оси вращения и \mathbf{n}_1 , перпендикулярный оси вращения. Предположим, что ось враще-

ния лежит в плоскости ZOY . Тогда вектор n_m можно представить в виде

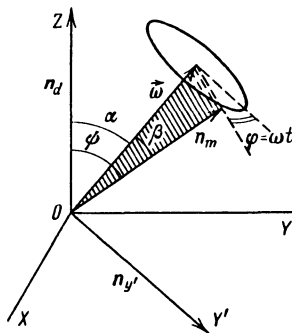
$$\mathbf{n}_m = n_\omega \cos \beta + n_\perp \sin \beta. \quad (89.IV)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (n_\omega n_d) [\mathbf{n}_m \times \mathbf{n}_d] &= (n_d n_\omega) [n_\omega n_d] \cos^2 \beta + \\ &+ \sin \beta \cos \beta (n_\omega n_d) [n_\perp n_d] + \sin \beta \cos \beta (n_\perp n_d) [n_\omega n_d] + \\ &+ \sin^2 \beta (n_d n_\perp) [n_\perp n_d]. \end{aligned}$$

Первый член постоянен, а второй и третий после усреднения по периоду

Рис. 56. Ось диполя n_m не совпадает с осью диска n_d и осью вращения нейтронной звезды n_ω



вращения звезды обращаются в нуль. Для того чтобы усреднить последний член, введем ось Y' , перпендикулярную оси n_ω и лежащую в плоскости ZOY . Записав вектор n_d в виде

$$\mathbf{n}_d = n_\omega \cos \alpha_0 - n_{y'} \sin \alpha_0$$

и проделав несложные вычисления, получим, что среднее по периоду равно

$$\langle (n_m n_d) [\mathbf{n}_m \mathbf{n}_d] \rangle = \frac{\cos \alpha_0}{2} (3 \cos^2 \beta - 1) [n_\omega n_d].$$

Подставим это выражение в (88.IV):

$$\langle dK \rangle = \frac{2\mu^2 d R \cos \alpha_0}{\pi R^4 (R^2/R_d^2 - 1)^{1/2}} (3 \cos^2 \beta - 1) [n_\omega n_d]. \quad (90.IV)$$

Интегрируя последнее выражение по всему диску, находим усредненный по периоду полный момент сил, приложенных ко всему диску (Липунов и Шакура, 1980; Кундт и Робник, 1980):

$$K_m = \frac{4\mu^2}{3\pi R_d^3} \cos \alpha_0 (3 \cos^2 \beta - 1) [n_\omega n_d]. \quad (91.IV)$$

Очевидно, такой же по значению и обратный по направлению момент сил приложен к диполю со стороны диска.

Замечательно, что момент сил K_m исчезает не только в тривиальных случаях $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_0 = \pi/2$, но и при некотором конечном угле между осью вращения и магнитной осью диполя:

$$\beta_0 = \arccos(\sqrt{3}/3) \approx 54^\circ 44'. \quad (92.IV)$$

Усредненная энергия магнитостатического взаимодействия равна

$$U_m = \frac{4\mu^2}{3\pi R_d^3} [2\cos^2\beta + (1 - 3\cos^2\beta)\sin^2\alpha_0]. \quad (93.IV)$$

§ 7. Магнитосфера в плоскопараллельном потоке плазмы

Рассмотрим ситуацию, когда радиус гравитационного захвата $R_G \ll R_A$. Случай, когда скорость движения аккрецирующей звезды гораздо меньше скорости звука в плазме, сводится к задаче с постоянным изотропным давлением, рассмотренной в § 5. Поэтому мы сейчас исследуем противоположную ситуацию, когда $v_\infty \gg a_\infty$, которая близка к "земным" условиям. В этом случае давление набегающего потока описывается формулой Ньютона:

$$P = P_0 \cos^2\chi. \quad (94.IV)$$

Это — наиболее подробно исследованная ситуация, так что здесь есть возможность сослаться не на отдельную статью, а на монографии (см., например, Акасофу и Чепмен, 1975).

Опишем решение задачи о нахождении формы границы магнитосферы в наиболее простом приближении, когда плазма не содержит собственных магнитных полей и, наоборот, внутри магнитосферы нет плазмы. Первое условие для аккрецирующих компактных звезд оправдано эффектом "магнитной откачки" (§ 10 гл. II).

На магнитосфере отношение магнитной энергии в аккрецируемом веществе к магнитной энергии собственного поля нейтронной звезды (при $R_G \ll R_A$) всегда равно (сравните с 102.III): $B_{out}^2/B_{in}^2 \approx (a_\infty/v_\infty)^2 \ll 1$.

Двумерное решение. Точное аналитическое решение поставленной задачи было получено Жигулевым и Ромишевским (1959) методом конформных отображений. Форма поверхности в координатах x, y задается в параметрическом виде:

$$x(\varphi) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{2[1 - \cos(\varphi + \psi)]} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n(n^2 - 1)} \cos n\varphi, \quad (95.IV)$$

и $y(\varphi)$ имеет вид:

- 1) $y = 1 + \cos\varphi - 2\psi/\pi$ при $|\psi| \leq \varphi \leq \pi$;
- 2) $y = -1 - \cos\varphi - 2\psi/\pi$ при $\pi \leq \varphi \leq 2\pi - |\psi|$;
- 3) при $\psi > 0$ выражение 1) справедливо также и в области $0 \leq \varphi \leq \psi$;
- 4) $y = 3 - \cos\varphi - 2\psi/\pi$ при $2\pi - \psi \leq \varphi \leq 2\pi$;
- 5) при $\psi < 0$ выражение 2) справедливо также и в области $2\pi - |\psi| \leq \varphi \leq 2\pi$;
- 6) $y = -3 + \cos\varphi - 2\psi/\pi$ при $0 \leq \varphi \leq |\psi|$. Координаты x и y измеряются в единицах альвеновского радиуса. Угол $0 \leq |\psi| \leq \pi$ есть угол между направлением движения потока и направлением диполя. Для того чтобы рассчитать напряженность магнитного поля в любой точке внутри магнитосферы, нужно воспользоваться формулой (74.IV) конформного отображения. Отображение найденной магнитосферы на внутренность единичного круга в плоскости $\xi = u + iv$ задается интегралом Шварца (см. Лаврентьев