ОСНОВНЫЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Неустойчивость Рэлея – Тейлора РТ. Представим себе сосуд, заполненный двумя жидкостями, имеющими плотности ρ_1 и ρ_2. Хорошо известно, что если тяжелая жидкость "лежит" на легкой $(\rho_1 < \rho_2)$, то ситуация оказывается неустойчивой: если слегка встряхнуть сосуд, то тяжелая жидкость опустится на дно, вытеснив наверх легкую. Это ясно из энергетических соображений: потенциальная энергия сосуда в поле тяжести меньше в том случае, когда тяжелая жидкость снизу. Неустойчивость границы, разделяющей тяжелую и легкую жидкости, называется неустойчивостью Рэлея – Тейлора. С ней мы часто сталкиваемся в жизни. Именно благодаря неустойчивости Рэлея – Тейлора в украинском борще плавают пятна жира.

Исследование неустойчивостей можно провести, рассмотрев задачу с динамической точки зрения. Задав малое возмущение границы и решив линеаризованные уравнения гидродинамики, можно не только убедиться в неустойчивости границы, но и определить характерное время нарастания этой неустойчивости. Любое малое возмущение будет нарастать по экспоненциальному закону $\sim e^{\Gamma t}$, где величина Γ называется инкрементом неустойчивости. Экспоненциальное нарастание характерно для начальной, линейной стадии развития неустойчивости. Когда возмущение границы становится большим, рост его замедляется.

Инкремент РТ-неустойчивости для несжимаемой жидкости можно оценить из следующих соображений, объясняющих явление с механической точки зрения. Пусть капелька тяжелой жидкости размером λ погружена в легкую жидкость. На эту капельку действуют сила тяжести и сила Архимеда. Уравнение движения капельки имеет вид

$$\rho_2\lambda^3 \frac{d^2 z}{dt^2} = \rho_2\lambda^3 g - \rho_1\lambda^3 g, \tag{1.П}$$

где g – ускорение силы тяжести, z – глубина, на которую опустится капля. Уравнение (1.П) показывает, что капля движется под действием эффективного ускорения:

$$g_{ef} = g(1 - \rho_1/\rho_2). \tag{2.П}$$

Инкремент неустойчивости – это величина, обратная характерному времени, за которое капля опустится на глубину Δz, равную размеру капли λ. Очевидно,

$$\Delta z = \frac{g_{ef}t^2}{2} . \tag{3.П}$$

Подставляя $\Delta z = \lambda$, получим, что инкремент РТ-неустойчивости равен (Ламб, 1947):

$$\Gamma_{\text{PT}} = (k_\lambda g_{ef})^{1/2}, \tag{4.П}$$

где $k_\lambda = 2\pi/\lambda$. Хотя выражение (4.П) получено путем качественного рассмотрения, оно совпадает с точным значением инкремента РТ-неустойчивости. С помощью (2.П) получаем

$$\Gamma_{\text{PT}} = (k_\lambda g)^{1/2} \sqrt{1 - \rho_1/\rho_2}. \tag{5.П}$$

Заменим теперь легкую жидкость однородным магнитным полем. Если возмутить границу таким образом, что силовые линии магнитного поля раздвинутся, но не изогнутся, то мы получим ситуацию, вполне аналогичную уже рассмотренной. Для таких возмущений магнитное поле можно заменять жидкостью с плотностью и давлением, равными соответственно (Нортроп, 1956)

$$\rho_m = \frac{B^2}{4\pi c^2}, \quad P_m = \frac{B^2}{8\pi}. \tag{6.П}$$

Подставляя в (5.П) $\rho_1 = \rho_m$, получим

$$\Gamma_{\text{PT}} = (k_\lambda g)^{1/2} \sqrt{1 - (v_A/c)^2} \approx \sqrt{k_\lambda g}. \tag{7.П}$$

В рассматриваемом приближении пренебрегаем членом $\sim (v_A/c)^2$, где v_A – альвеновская скорость:

$$v_A^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho_2}. \tag{8.П}$$

Таким образом, эта ситуация всегда неустойчива. Однако возмущение приводит к изгибу силовых линий – неустойчивость стабилизируется на малых длинах волн λ. Это происходит из-за того, что силовые линии стремятся выпрямиться.

Если $\boldsymbol{k}$ – волновой вектор возмущения, направленный под произвольным углом к магнитному полю, условие возникновения неустойчивости принимает вид (см. Чандрасекар, 1961)

$$k_\lambda \rho g > \frac{(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B})^2}{4\pi}, \tag{9.П}$$

Последнее неравенство можно получить следующим образом. Вычислим силу, действующую на цилиндрический элемент объема, еще связанный с границей, но опустившийся на глубину Δz. Уравнения для несжимаемой жидкости:

$\Delta \mathbf{v} = 0$ – уравнение неразрывности;

$\rho \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \delta P = 0$ – уравнение Эйлера,

где δP – возмущение давления. Граница задается в виде: $\Delta z = \eta \sin \boldsymbol{k}x$. Очевидно, δP – аналитическая функция, так как $\Delta \delta P = 0$. δP можно представить в виде $\delta P = \delta P(0)\, e^{-kz} \sin \boldsymbol{k}x = \eta \rho g e^{-kz} \sin \boldsymbol{k}x$. Тогда сила, характеризующая плавучесть магнитной трубки, равна $-k_\lambda \eta \rho g \Delta z \sin(kx)$.

Результирующая сила, действующая на трубку, есть

$$F = \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B})^2}{4\pi}\ \Delta z\eta \sin(\boldsymbol{kx}) - k_\lambda \eta\rho g \Delta z \sin(\boldsymbol{kx}).$$

Трубка будет опускаться, если удовлетворяется неравенство (9.П).

Дополнительная стабилизация РТ-неустойчивости возникает в том случае, когда граница плазма – поле искривлена. Пусть d – смещение в направлении, перпендикулярном границе, которая задается единичным вектором нормали $\boldsymbol{n}_s$. Неустойчивость будет развиваться, если сила тяжести превзойдет градиент давления магнитного поля, вызванный кривизной

$$d\,\boldsymbol{n}_s\rho g > d\,\boldsymbol{n}_s\nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) = dk_c\,\frac{B^2}{4\pi}, \tag{10.П}$$

где k_c – кривизна силовой линии на границе. Заметим, что если граница вогнута в сторону магнитного поля, то и поле способствует росту неустойчивости.

В общем случае, когда плазма неоднородна и неоднородно поле, устойчивость проверяется при помощи "энергетического принципа" (Бернштейн и др., 1958). Согласно энергетическому принципу граница плазма – поле устойчива, если вариация энергии δW_s, вызванная деформацией границы, положительна:

$$\delta W_s = -\frac{1}{2}\int\limits_S (\boldsymbol{n}_s d)^2\ \boldsymbol{n}_s\nabla(P_0 - B^2/(8\pi))\,ds. \tag{11.П}$$

Используя равенства $\nabla P = \rho g$ и $\nabla B^2 = 2k_c B^2 \boldsymbol{n}_s$, можно получить из (11.П) результат типа (9.П). Граница неустойчива, если

$$\rho n g > k_c\,\frac{B^2}{4\pi}. \tag{12.П}$$

До сих пор, возмущая силовые линии, мы считали их свободными. В действительности возможны ситуации, когда силовые линии "закреплены" на концах. Это приводит к дополнительной стабилизации границы. Чтобы учесть это обстоятельство, необходимо к интегралу (11.П) добавить вариацию энергии вакуумной части, занятой магнитным полем (пока силовые линии были не закреплены, энергия поля не менялась). Представим, что силовые линии закреплены на концах в идеально проводящих пластинках. Очевидно, в этом случае смещение границы d не может быть произвольным (на концах $d = 0$). Если расстояние между пластинками l, то даже при $\boldsymbol{k}\perp B_0$ может наступить стабилизация, если

$$\frac{\pi B_0^2}{4l^2} > \rho g k_\lambda. \tag{13.П}$$

Наконец, существуют еще два эффекта (см. Али, 1985), тормозящие развитие РТ-неустойчивости. Вязкость, хотя и не меняет условия неустойчивости границы (12.П), но замедляет рост неустойчивости для возмущений с волновым числом

$$k_\lambda > k_* = (g/\nu_k^2)^{1/3}, \tag{14.П}$$

где ν_k – кинематическая вязкость. Для таких возмущений инкремент домножается на фактор $(1/2)\,(k_*/k_\lambda)^{3/2}$. При этом необходимо учесть, что магнитное поле, проникающее в плазму, меняет ее вязкость.

Второе ограничение возникает при учете конечности длины волны возмущения. РТ-неустойчивость стабилизируется, если волновое число

$$k_\lambda > k_L \approx g^{1/2} R_L^{-4/3} \omega_i^{2/3}, \qquad (15.\text{П})$$

где R_L – ларморовский радиус иона и ω_i – ларморовская частота в поле, проникающем в плазму.

На нелинейной стадии образуются сигарообразные вытянутые вдоль поля сгустки плазмы, которые, раздвигая силовые линии, движутся вниз. Двумерные расчеты классической РТ-неустойчивости были проведены недавно Вангом и Невью (1983) и Вангом и др. (1984). По мнению авторов, коротковолновые моды наиболее эффективны в смысле переноса массы. Размеры отдельных сгустков контролируются эффективной вязкостью.

Перестановочная неустойчивость. Граница плазмы и поля может быть неустойчива даже в том случае, когда сила тяжести отсутствует. Мы уже отмечали (см. (10.П)), что если граница вогнута в сторону магнитного поля, то возможна дополнительная неустойчивость. Если мысленно поменять местами плазму и поле, то силовые линии выгнутся и энергия магнитного поля уменьшится. Такая перестановочная неустойчивость имеет такой же инкремент, как и РТ-неустойчивость:

$$\Gamma_{in} = (k_\lambda g_{ef})^{1/2}, \qquad (16.\text{П})$$

где

$$g_{ef} = \left(\nabla P - \nabla \frac{B^2}{8\pi}\right)\Big/\rho. \qquad (17.\text{П})$$

Перестановочная неустойчивость имеет место и в случае плоской границы, когда напряженность магнитного поля падает при удалении от границы.

Неустойчивость Кельвина – Гельмгольца. Качественно новое явление возникает, если две жидкости двигаются друг относительно друга. Оказывается, что независимо от соотношения между их плотностями граница раздела неустойчива. Такая неустойчивость впервые была исследована Кельвином и Гельмгольцем (см. Ламб, 1947) в гидромеханике, а в магнитной гидродинамике – Крускалом и Шварцшильдом (1954).

Благодаря неустойчивости Кельвина – Гельмгольца КГ-неустойчивости возникают волны на воде и развеваются паруса и флаги. Ее возникновение элементарно можно понять, рассмотрев две жидкости, заполняющие пространство. Пусть вначале граница между движущейся и покоящейся жидкостями совершенно плоская и давление в обеих жидкостях одинаково. Возмутим слегка границу. Обтекая мыс, жидкость ускоряется и, как это следует из интеграла Бернулли, давление в ней падает; обратная ситуация – в заливах. В результате "берег" становится все более и более изрезанным.

Можно рассуждать и таким образом. Обтекая произвольную границу, жидкость начинает испытывать центробежное ускорение

$$\frac{d^2(\Delta z)}{dt^2} = \frac{v^2}{r_c} \approx v^2 \Delta z k_\lambda^2, \qquad (18.\text{П})$$

где Δz – по-прежнему глубина, отсчитываемая от границы, r_c – радиус кривизны. Для кривой $\Delta z = (\Delta z)_0 \sin(k_\lambda x)$ радиус кривизны $r_c \approx 1/(\Delta z k_\lambda^2)$ в самой выступающей в поток точке. Следовательно,

$$\frac{d^2(\Delta z)}{dt^2} \approx v^2 \Delta z k_\lambda^2. \tag{19.П}$$

Решение этого уравнения имеет вид $\Delta z \sim e^{\Gamma t}$, где

$$\Gamma_{\text{КГ}} = k_\lambda v. \tag{20.П}$$

Если жидкости имеют разные плотности и помещены в поле тяжести, то условие устойчивости приобретает вид

$$\rho_1 \rho_2 \left((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\mathbf{k}\right)^2 \leqslant (\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - \rho_2) k_\lambda g, \tag{21.П}$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ – скорости движения жидкостей. Ясно, что если верхняя жидкость плотнее ($\rho_2 > \rho_1$), граница будет всегда неустойчива. Однако, если тяжелая скорость находится снизу, достаточно длинные волны будут стабилизированы силой тяжести, как это и происходит в волнах на воде.

Чтобы найти инкремент неустойчивости, решают линеаризованное уравнение гидродинамики, причем решение ищется в виде $f(z)\, e^{i(k_\lambda r - \omega t)}$, где r – координата в плоскости невозмущенной границы. Требования непрерывности границы и малости возмущения "на бесконечности" приводят к следующему результату. Поскольку $f(z) = e^{-k_\lambda |z|}$, возмущение при удалении от границы затухает на масштабах порядка длины волны. Частота ω связана с волновым числом k_λ следующим дисперсионным соотношением:

$$\omega = \frac{\rho_1 (k_\lambda \mathbf{v}_1) + \rho_2 (k_\lambda \mathbf{v}_2)}{\rho_1 + \rho_2} \pm$$

$$\pm i \left[\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \left[(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) k_\lambda\right]^2 - k_\lambda g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right]^{1/2}. \tag{22.П}$$

Когда плотность верхней жидкости много меньше, чем тяжелой, $\rho_2 \ll \rho_1$, неустойчивые волны бегут с тяжелой жидкостью 1; скорость их нарастания $\Gamma_{\text{КГ}} \approx k v_0 \sqrt{\rho_2/\rho_1}$ очень мала, $v_0 = v_2 - v_1$.

Если относительная скорость движения жидкостей сравнима со скоростью звука a_s, то необходимо учитывать сжимаемость жидкостей. Существенно различны случаи до- и сверхзвукового течения (Ландау и Лифшиц, 1953; Плессет и Шех, 1964). В сверхзвуковом режиме неустойчивость оказывается подавленной вне ударного конуса.

Перейдем теперь к рассмотрению плазменных неустойчивостей. Пусть полпространства занимает однородное магнитное поле B, а вторую половину – однородная плазма, двигающаяся со скоростью v. Эта задача впервые была исследована Нортропом (1956). Как мы уже отмечали выше, если возмущение не изгибает силовые линии, то в приближении несжимаемой жидкости магнитное поле можно заменить жидкостью с плотностью и скоростью, определяемыми из формул (6.П). Положим в (22.П) $\rho_2 = \rho_m = B^2/(4\pi c^2)$, $g = 0$. Инкремент нарастания КГ-неустойчивости:

$$\Gamma_{\text{КГ}} = \frac{k_\lambda v_A v}{c}. \tag{23.П}$$

Представляет интерес вопрос о том, как изменится инкремент неустойчивости, если мы учтем конечные размеры потока. Ведь именно с такой ситуацией мы сталкиваемся при дисковой аккреции на замагниченную нейтронную звезду.

Пусть плоский поток несжимаемой жидкости обжат с обеих сторон магнитным полем. Если направление потока v и направление возмущения k параллельны друг другу и оба перпендикулярны направлению магнитного поля, то можно воспользоваться гидродинамическим аналогом задачи (Липунов, 1978в). В гидромеханике аналогичная задача была рассмотрена Рэлеем (см. Ламб, 1947). Обобщая дисперсионное уравнение на случай плазмы и поля, получим

$$(\omega - k_\lambda v)^2 + \omega^2 \left(\frac{v_A}{c}\right)^2 \operatorname{ctgh}(k_\lambda H) = 0. \tag{24.П}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\omega = \frac{k_\lambda v}{1 + (v_A/c)^2 \operatorname{ctgh}(k_\lambda H)} \left(1 \pm i \frac{v_A}{c} \sqrt{\operatorname{ctgh}(k_\lambda H)} \right). \tag{25.П}$$

Рассматривается случай, когда обе границы потока возмущаются в одной фазе. Знак "плюс" соответствует растущей моде и для инкремента неустойчивости получаем следующее выражение:

$$\Gamma_{\text{КГ}} = \frac{k_\lambda v v_A}{c} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{ctgh}(k_\lambda H)}}{1 + (v_A/c)^2 \operatorname{ctgh}(k_\lambda H)}. \tag{26.П}$$

Для длинных волн $k_\lambda \to 0$ асимптотика имеет вид

$$\Gamma_{\text{КГ}}(k_\lambda \to 0) \approx \frac{k_\lambda^{3/2} v c}{v_A} \sqrt{H}. \tag{27.П}$$

Для коротких волн асимптотикой является формула Нортропа (23.П). Мы видим, что с ростом длины волны инкремент неустойчивости уменьшается *).

Вернемся теперь к случаю несжимаемого полубесконечного потока плазмы, но учтем силу тяжести. В этом случае инкремент неустойчивости равен

$$\Gamma_{\text{КГ}} = \left(\frac{k_\lambda^2 v^2}{c^2} - k_\lambda g / v_A^2 \right)^{1/2} v_A. \tag{28.П}$$

Видно, что неустойчивыми будут лишь достаточно коротковолновые моды:

$$\lambda < \lambda_g = 2\pi \left(\frac{v_A v}{c} \right)^2 \Big/ g. \tag{29.П}$$

Ванг и Велтер (1982) обобщили задачу Нортропа на случай, когда движение плазмы происходит под произвольным углом к направлению магнитного поля. Они показали, что присутствие даже слабого поля внутри плазмы, направленного под углом к полю в вакууме, стабилизирует границу.

---

*) Интересно, что хотя $\Gamma_{\text{КГ}} \to 0$ при $k_\lambda \to 0$, для бесконечно тонкой среды существует неустойчивое решение. Как показал Рэлей, рост возмущения при этом пропорционален t (Ламб, 1947).