Глава 1

Пространство и время

§ 1. Представления о пространстве и времени в механике Ньютона

Принцип относительности является одним из древнейших и фундаментальнейших принципов современной физики. Его истоки восходят еще к натуральной философии. Зарождение и развитие этого принципа тесно связаны с развитием представлений о пространстве и времени, поскольку пространство и время являются той ареной, на которой протекают все физические процессы. Поэтому по мере развития наших физических знаний происходило и развитие представлений о пространстве и времени. Анализ развития представлений о пространстве и времени давайте начнем с механики Ньютона.

Начало бурного развития механики как науки о движении тел относится к середине XVII века. Механика того периода была опытной наукой, занимающейся установлением эмпирических соотношений между кинематическими и динамическими характеристиками движущихся тел и действующими на них силами. Как результат обобщения громаднейшего количества опытных данных Ньютоном были сформулированы три его знаменитых закона динамики и закон тяготения. Это дало возможность решать обширный для того времени круг задач о движении тел.

Механика Ньютона знаменовала собой и определенный этап в развитии представлений о пространстве и времени. При этом, с одной стороны, представления о евклидовой геометрии трехмерного пространства были явным образом заложены в механику Ньютона как следствие используемых в ней правил сложения векторов и определения величины расстояния между двумя точками. С другой стороны, проверка на опыте основных принципов механики Ньютона и сравнение ее предсказаний с результатами экспериментов показали с большой точностью, что трехмерное пространство действительно является евклидовым.

Свойства пространства и времени в механике Ньютона можно установить и в результате анализа группы преобразований, оставляющих уравнения движения форминвариантными. Запишем уравнения Ньютона, к примеру, для системы двух частиц:

$$M_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = F(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|};$$
$$M_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -F(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор первой частицы; $\mathbf{r}_2$ — радиус-вектор второй частицы; M_1 и M_2 — массы соответственно первой и второй частиц.

Функция $F(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$ отражает характер действующих между телами сил. В механике Ньютона в основном рассматриваются силы двух типов: тяготения и упругости. Для этих типов сил имеем

$$F(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = -\gamma \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2}$$

для сил тяготения и

$$F(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = -k|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$$

для сил упругости, где k — коэффициент жесткости; γ — гравитационная постоянная.

Из выражения (1.1) следует, во-первых, что эти уравнения являются форминвариантными относительно преобразования переноса начала координат, когда время не преобразуется, а координаты смещены на постоянный вектор:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{b}; \quad t' = t. \tag{1.2}$$

Действительно, при этом преобразовании радиусы-векторы первого и второго тел будут иметь вид

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b};$$
$$\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}.$$

Отсюда следует, что разность их радиусов-векторов не изменяется при преобразовании (1.2): $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'$. Кроме того, в силу второго из равенств (1.2) имеем $d/dt = d/dt'$.

Поэтому при преобразовании (1.2) уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} M_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1'}{dt'^2} &= F(|\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1'|) \frac{\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'}{|\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'|}; \\ M_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2'}{dt'^2} &= -F(|\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1'|) \frac{\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'}{|\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'|}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Сравнивая уравнения (1.1) и (1.3), убеждаемся, что они имеют одинаковую функциональную зависимость от координат, и поэтому, как говорят в таких случаях, уравнения механики являются форминвариантными при преобразованиях (1.2). Отметим также, что при преобразованиях (1.2) величина относительной скорости не изменяется:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \mathbf{v} = \frac{d}{dt'}(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2') = \mathbf{v}'.$$

Физический смысл преобразования (1.2) можно трактовать двумя способами: а) описание механического явления не зависит от того, где мы поместим начало координат; б) если мы данное механическое явление перенесем в другую точку пространства, отстоящую на вектор $\mathbf{b}$ от первой, то в этой точке оно будет протекать аналогичным образом. Это означает, что в пространстве нет выделенных точек, а следовательно, оно однородно.

Во-вторых, преобразования сдвига по времени

$$t' = t + a; \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} \tag{1.4}$$

также оставляют уравнения (1.1) форминвариантными, поскольку при преобразовании (1.4) дифференциалы по времени совпадают:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'}.$$

Величина относительной скорости двух тел также не меняется при этом преобразовании. Преобразование (1.4) описывает перенос начала отсчета у всех часов на одну и ту же величину, без изменения пространственных координат. Поэтому форминвариантность уравнений механики при этом преобразовании означает отсутствие выделенного момента времени, физическое равноправие всех точек на временной оси, в результате чего один и тот же механический процесс при одинаковых начальных условиях будет протекать одинаковым образом, независимо от того, в какой момент времени мы его начнем, или, говоря другими словами, два механических процесса при одинаковых начальных условиях будут демонстрировать одинаковое течение процесса, независимо от выбора начального момента для каждого из них.

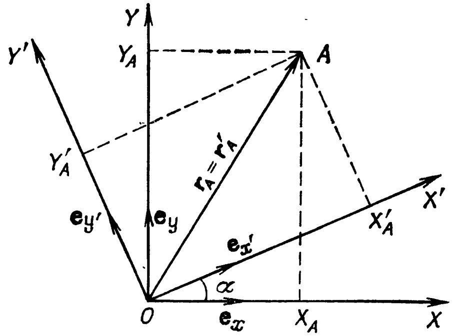

Рис. 1. Преобразование поворота системы координат вокруг оси

Далее, из этой же механики следует инвариантность уравнений (1.1) относительно поворота системы координат на произвольные углы. В частном случае поворота системы координат вокруг оси z на угол α (см. рис. 1) мы имеем

$$\begin{aligned} X'_A &= X_A\cos\alpha + Y_A\sin\alpha; \\ Y'_A &= Y_A\cos\alpha - X_A\sin\alpha; \\ \mathbf{e}_{x'} &= \mathbf{e}_x\cos\alpha + \mathbf{e}_y\sin\alpha; \\ \mathbf{e}_{y'} &= \mathbf{e}_y\cos\alpha - \mathbf{e}_x\sin\alpha; \quad t = t', \end{aligned} \tag{1.5}$$

поэтому

$$\mathbf{r}'_A = X'_A\mathbf{e}_{x'} + Y'_A\mathbf{e}_{y'} = X_A\mathbf{e}_x + Y_A\mathbf{e}_y = \mathbf{r}_A,$$

а следовательно, такое преобразование оставляет систему уравнений (1.1) форминвариантной. Иначе говоря, мы можем повернуть исходную систему координат на постоянный угол; от этого ход механического процесса не изменится. Это говорит об изотропности пространства, т. е. об отсутствии в пространстве выделенных направлений.

Таким образом, уравнения механики Ньютона позволяют сделать определенные заключения о свойствах пространства и времени: однородности и изотропности пространства и однородности времени. Если бы пространство и время не обладали этими свойствами, то механика Ньютона, основанная на уравнениях (1.1), с какой-то точностью могла быть и неверна.

Есть еще, однако, и четвертая группа преобразований, оставляющих уравнения (1.1) форминвариантными, которая в механике Ньютона всегда стояла особняком, а именно преобразования Галилея, описывающие переход от одной системы координат к другой, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой:

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\mathbf{V}t; \quad t'=t. \tag{1.6}$$

При этом преобразовании имеем

$$\frac{d}{dt}=\frac{d}{dt'}; \quad \mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2. \tag{1.7}$$

Подставляя соотношения (1.7) в уравнения (1.1), легко убедиться, что преобразование (1.6) оставляет уравнения механики форминвариантными. Однако если первые преобразования (1.2), (1.4) и (1.5) относились к трехмерному пространству или времени по отдельности, то данное преобразование рассматривалось как дополнительное, которое следует из уравнения механики Ньютона. Полностью осознано это преобразование не было. Правда, оно сразу приводит к подтверждению принципа относительности в механике, поскольку все механические процессы, рассматриваемые в одной инерциальной системе отсчета, и в другой, равномерно и прямолинейно движущейся относительно первой, по существу, протекают одинаковым образом. Когда вы занимаетесь изучением механических явлений, то не можете сказать, находитесь ли в покое или равномерно движетесь, поскольку преобразования (1.6) оставляют уравнения механики Ньютона форминвариантными и величина скорости $\mathbf{V}$ движения одной системы координат относительно другой в уравнения (1.1) не войдет. Таким образом, с преобразованием (1.6) в механике Ньютона и был связан принцип относительности Галилея.

Рассмотренные выше две группы преобразований: группа, отражающая свойства однородности времени и однородности и изотропности пространства и группа Галилея, имеют независимое существование, и глубокая связь между ними долгое время, вплоть до работ Пуанкаре и Минковского, по существу, не была установлена.

Из механики Ньютона также непосредственно следует, что расстояние в трехмерном пространстве, т. е. в пространстве координат, является инвариантом для всех инерциальных систем отсчета.

Действительно, расстояние между двумя точками A и B в нештрихованной (неподвижной) системе отсчета равно

$$l^2=(X_B-X_A)^2+(Y_B-Y_A)^2+(Z_B-Z_A)^2.$$

В штрихованной (движущейся) системе отсчета имеем

$$l'^2=(X'_B-X'_A)^2+(Y'_B-Y'_A)^2+(Z'_B-Z'_A)^2.$$

Подставляя сюда соотношения

$$X'_B=X_B-V_xt;\quad Y'_B=Y_B-V_yt;\quad Z'_B=Z_B-V_zt$$

и аналогичные соотношения между штрихованными и нештрихованными координатами точки A, получим

$$l=l'. \tag{1.8}$$

Следовательно, это абсолютное понятие, оно не зависит от системы отсчета. Что касается времени, то оно здесь является некоторым параметром, который тоже не зависит от системы отсчета и который в разных системах отсчета один и тот же.

Таким образом, механика Ньютона вводит абсолютное понятие расстояния между точками в трехмерном пространстве и абсолютное время. Мы убедились ранее в инвариантности уравнений механики Ньютона относительно группы преобразований трехмерного пространства, что свидетельствовало о евклидовости пространства. Установим теперь этот факт и из анализа уравнений механики в форме Гамильтона—Якоби. Как известно из механики, функция Гамильтона выражается через функцию Лагранжа следующим образом:

$$H=p_k\dot{q}_k-L,$$

где $p_k=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ — обобщенный импульс.

Уравнения механики Гамильтона имеют симметричный вид:

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k};\qquad \dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}. \tag{1.9}$$

Прежде чем перейти к уравнению механики в форме Гамильтона — Якоби, напомним сведения из теории уравнений в частных производных первого порядка. Если уравнение имеет вид

$$F(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n) = 0; \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \tag{1.10}$$

то уравнения характеристик для него представляются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_1}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_n}{\dfrac{\partial F}{\partial p_n}} = -\frac{dp_1}{\dfrac{\partial F}{\partial q_1}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\dfrac{\partial F}{\partial q_n}}. \tag{1.11}$$

Для получения уравнения Гамильтона — Якоби запишем систему уравнений Гамильтона (1.9) в виде

$$\frac{dt}{1} = \frac{dq_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_n}{\dfrac{\partial H}{\partial p_n}} = -\frac{dp_1}{\dfrac{\partial H}{\partial q_1}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\dfrac{\partial H}{\partial q_n}}. \tag{1.12}$$

Используя предыдущее, мы можем заменить эту систему уравнений уравнением в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_1, \ldots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = 0. \tag{1.13}$$

Это и есть уравнение Гамильтона — Якоби.

Для случая движения одной материальной точки (в декартовой системе координат) имеем

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Отсюда

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] = 0. \tag{1.14}$$

Если в этом уравнении перейти к криволинейным координатам, то будем иметь

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\gamma^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = 0. \tag{1.15}$$

Величина γ^{ik} является метрическим тензором.

Расстояние между двумя соседними точками пространства выражается через этот тензор следующим образом (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование):

$$dl^2 = \gamma^{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta. \qquad (1.16)$$

Поскольку в декартовой системе координат метрический тензор диагонален:

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 1; \quad \gamma_{ik} = 0, \text{ если } i \neq k, \qquad (1.17)$$

то трехмерное пространство является евклидовым.

Таким образом, мы можем высказать общее утверждение: если для какой-то формы материи мы имеем законы ее движения в форме дифференциальных уравнений, то эти уравнения содержат и представления о структуре пространства и времени. Хотя это утверждение является естественным и общим, путь к нему был не совсем простой. И что удивительно? Он труднее оказался для физиков и легче был преодолен математиками-естествоиспытателями. Это объясняется прежде всего тем, что к этому времени в математике была глубоко разработана теория групп и инвариантов и изучалась группа движения пространства. Для физиков же того времени понятия инвариантности и группы были еще далеки.

Как мы видели, уравнения механики остаются форминвариантными при преобразовании Галилея, а следовательно, для всех механических процессов выполняется принцип относительности. Пуанкаре сформулировал этот принцип для всех физических явлений следующим образом [5]: «Принцип относительности, согласно которому законы физических явлений должны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа определять, находимся ли мы в подобном движении или нет».

Поскольку уравнения Максвелла, описывающие электромагнитные явления, при преобразованиях Галилея изменяются, то делали вывод, что уравнения Максвелла не удовлетворяют принципу относительности. Делались попытки видоизменить эти уравнения таким образом, чтобы они при преобразованиях Галилея оставались неизменными. Такие новые уравнения написал Генрих Герц. Это привело к тому, что в уравнениях появились дополнительные члены, а следовательно, в природе должны были существовать новые электромагнитные процессы. Однако опыт этого не подтвердил. Сомнения в правильности уравнений Максвелла постепенно исчезли.

§ 2. Электродинамика Максвелла — Лоренца и единое пространство-время Минковского

Обобщая эксперименты и глубокие идеи Фарадея, Максвелл объединил магнитные, электрические и оптические явления и открыл свои знаменитые уравнения, которые для движущегося электрона в неподвижной координатной системе записаны Лоренцем в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0; \\ &\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho; \\ &\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \frac{\rho}{c}[\mathbf{vH}], \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля; ρ — объемная плотность электрона; $\mathbf{f}$ — электродинамическая сила, с которой поле действует на элемент объема электрона (сила Лоренца).

Эти уравнения называют уравнениями Максвелла — Лоренца. Они при преобразованиях Галилея не остаются неизменными. Отсюда, казалось бы, следует, что они не удовлетворяют принципу относительности. Однако это заключение неправильно. Преобразования Галилея и принцип относительности — это разные вещи. Преобразования Галилея получены из уравнений Ньютона как преобразования, оставляющие их инвариантными (форминвариантными) при переходе от неподвижной системы отсчета к системе отсчета, движущейся с постоянной скоростью, и если уравнения Ньютона не всегда выполняются в природе и будут заменены другими законами механики, то и преобразования Галилея не должны обеспечивать инвариантность новых законов механики. Принцип относительности имеет более фундаментальный характер. Согласно ему, даже если уравнения Ньютона будут заменены другими уравнениями механики, никакими механическими явлениями нельзя показать, находитесь вы в