в выделение в ней главного и второстепенного. После Рейхенбаха вопросы синхронизации часов обсуждались Мандельштамом [11] и в последнее время Тяпкиным [12].

Однако мнение, что центральным пунктом специальной теории относительности является понятие одновременности, глубоко ошибочно. Понятие одновременности основано на процедуре синхронизации часов. Синхронизация же часов, как показал Рейхенбах, может быть достаточно произвольной. Она является простым следствием того или иного выбора координатной системы. Более того, существуют такие координатные системы (например, ускоренные), в которых синхронизация часов не может быть осуществлена, хотя описание физических процессов в такой системе возможно и в рамках специальной теории относительности.

Из предыдущего следует, что постулат о постоянстве скорости света (как он определен Эйнштейном) в общем случае произвольной синхронизации часов не выполняется, поэтому возникает ряд вопросов.

Как определить физическое время в случае синхронизации часов по Рейхенбаху? Как определить физическое расстояние между двумя точками пространства в этом случае? Какова же предельно допустимая скорость распространения сигналов?

Для того чтобы ответить на все эти вопросы, необходимо понять сущность теории относительности. Без такого понимания невозможно получить правильные ответы на эти и другие вопросы. Именно из-за отсутствия понимания главного в специальной теории относительности в ряде монографий и учебников бытует до сих пор неправильное утверждение о неприменимости специальной теории относительности к описанию явлений в неинерциальных системах отсчета и необходимости применения в этом случае общей теории относительности, о конвенциальном характере ряда понятий физики. Разъяснению всех этих вопросов и посвящены настоящие лекции.

§ 3. Преобразования Лоренца

Механика Ньютона, как мы теперь знаем, вновь установила, что геометрия нашего трехмерного мира евклидова, а время абсолютно. Сюрприз преподнесла электродинамика: из нее следует, что (если над ней всерьез задуматься) пространство и время объединены в одну геометрию (четырехмерную) и что эта геометрия — псевдоевклидова (с метрикой (2.10)). А когда задана геометрия пространства, то в этом пространстве можно вводить различные системы координат. Рассматриваемую до сих пор систему координат (ct и $\mathbf{r}$ — три декартовы координаты), приводящую к метрике (2.13), мы будем называть галилеевой системой координат. Однако при описании физических процессов, вообще говоря, можно пользоваться и другими координатными системами, но из класса так называемых допустимых. Определение допустимых систем координат будет дано позднее.

Теперь посмотрим, как возникают преобразования Лоренца. Возьмем выражение для интервала в галилеевой системе координат

$$ds^2 = c^2\,dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \tag{3.1}$$

и совершим преобразования Галилея:

$$x = X - vT;\quad t = T;\quad y = Y;\quad z = Z. \tag{3.2}$$

Обратные преобразования имеют вид

$$X = x + vt;\quad T = t;\quad Y = y;\quad Z = z, \tag{3.3}$$

где X, Y, Z, T — галилеевы координаты.

Взяв дифференциалы от обеих частей равенств (3.3) и подставив dT, dX, dY, dZ в выражение для интервала (3.2), получим

$$ds^2 = c^2\,dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - 2v\,dx\,dt - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{3.4}$$

Мы видим, что в правой части соотношения (3.4) возник перекрестный член $dx\,dt$. От него мы можем избавиться. Для этого выделим в выражении (3.4) полный квадрат.

В результате интервал (3.4) примет вид

$$ds^2 = c^2\left[dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right]^2 - \frac{dx^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - dy^2 - dz^2. \tag{3.5}$$

Таким образом, мы видим, что выражение (3.5) для интервала ds^2 состоит из двух частей: положительной и отрицательной. Положительная часть в этом интервале будет иметь времениподобный характер, а отрицательная часть — пространственноподобный.

А теперь давайте введем новое время

$$T' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{v}{c^2}\frac{x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.6}$$

и новые координаты

$$X' = \frac{x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad Y' = y; \quad Z' = z. \tag{3.7}$$

Тогда выражение (3.5) для интервала в этих переменных будет иметь точно такой же вид, как и в выражении (2.13), только дифференциалы координат и времени будут со штрихами:

$$ds^2 = c^2\,dT'^2 - dX'^2 - dY'^2 - dZ'^2. \tag{3.8}$$

В результате два последовательных преобразования (3.2) и (3.6)—(3.7) оставляют метрику форминвариантной. Подставляя выражения (3.2) в (3.6) и (3.7), получим хорошо известные преобразования Лоренца

$$T' = \frac{T - \frac{vX}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad X' = \frac{X - vT}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$
$$Y' = Y; \quad Z' = Z. \tag{3.9}$$

Обратные преобразования имеют вид

$$T = \frac{T' + \frac{vX'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad X = \frac{X' + vT'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$
$$Y = Y'; \quad Z = Z'. \tag{3.10}$$

Таким образом, я ввел новое понятие времени (T') и новую координату (X'), так что выражение для интервала опять приняло диагональный характер. Вы можете спросить, почему время и координаты в выражении (2.13) одни, а в выражении (3.8) — другие, и что же считать временем, а что координатой? Подробнее я специально остановлюсь на этом позже, а сейчас скажу, что все физические процессы можно описывать в любых допустимых координатах (t, x, y, z) и это описание будет таким же полноценным, как, скажем, в координатах (T, X, Y, Z). Однако при этом величины (t, x, y, z) уже будут координатными величинами, не связанными непосредственно с физическими величинами. Поясню это следующим простым примером. Как вы знаете, в трехмерном пространстве мы можем равноправно использовать декартовы (X, Y, Z), цилиндрические (r, φ, z) и сферические (ρ, θ, φ) координаты. Вид же квадрата дифференциала расстояния между двумя бесконечно близкими точками трехмерного пространства, записанный в этих системах координат, будет разный:

$$d\mathbf{R}^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2;$$
$$d\mathbf{R}^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + dz^2;$$
$$d\mathbf{R}^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2.$$

Сюда уже входят не только дифференциалы длины, но, скажем, и дифференциалы углов, причем каждый раз стоит какая-то функция соответствующих координат — это так называемые метрические коэффициенты. И только дифференциалы вместе со своими метрическими коэффициентами могут вам дать физические величины. Сами по себе дифференциалы четырех координат в общем случае никакого физического смысла не имеют, т. е. они непосредственно не связаны ни с расстоянием между двумя точками в трехмерном пространстве, ни с временным ходом процессов.

Давайте теперь сформулируем некоторые выводы.

Форминвариантность. В приведенном выше примере мы специально позаботились о форминвариантности интервала: сначала мы подставили в ds^2 преобразования (3.3) старых координат через новые, потом выбрали в подвижной системе координат новый набор переменных (3.6)—(3.7), и в результате интервал в штрихованной системе координат получился точно таким же по форме, как и в нештрихованной. В случае псевдоевклидовой геометрии форминвариантность интервала реализуется всегда, а вот в случае более сложных геометрий это, в принципе, не всегда может иметь место. Поскольку при преобразованиях, оставляющих метрику форминвариантной, все уравнения физики (механики, электродинамики и т. д.) остаются форминвариантными, то при этом и функциональная зависимость уравнений поля от новых координат будет неизменной. Поэтому во всех системах координат, преобразования между которыми оставляют метрику форминвариантной, все физические явления, описываемые этими уравнениями, будут протекать одинаковым образом — так, что мы не сможем никаким экспериментом установить, в какой именно из этих систем отсчета мы находимся. Таким образом, форминвариантность интервала (3.1) при последовательном применении преобразований (3.3), (3.6) и (3.7) гарантировала нам, что все системы координат, связанные результирующим преобразованием (3.9), являются физически тождественными: никаким физическим экспериментом нельзя отличить одну из этих систем от другой.

Таким образом, принцип относительности Галилея является частным следствием того, что геометрия пространства-времени является псевдоевклидовой. Из уравнений Максвелла — Лоренца, как мы убедились ранее, точно следует, что пространство-время едино и геометрия его псевдоевклидова. Это утверждение есть строгая математическая истина. Таким образом, изучение электромагнитных явлений привело к открытию структуры пространства-времени. Это, в свою очередь, позволило выдвинуть гипотезу, что и для других физических процессов пространство-время псевдоевклидово.

Поэтому *сущность теории относительности* (специальной теории относительности) состоит в следующем (это постулат): *физические процессы протекают в четырехмерном пространстве* (ct и пространственные координаты), *геометрия которого псевдоевклидова*. Принцип относительности есть частное проявление этого фундаментального постулата, не более.

Абсолютное значение величины интервала. Я еще раз подчеркну: если мы взяли интервал (3.1), который является инвариантом, то расстояние между двумя точками в трехмерном пространстве и время между двумя событиями уже сами по себе не являются понятиями абсолютными (как это было в механике Ньютона). Специальная теория относительности низвергла их абсолютизм и сделала их относительными понятиями. Абсолютен интервал. Он может быть и положительно, и отрицательно определенным, а для светового луча равен нулю. Если назвать $ds^2 > 0$ времениподобным интервалом, $ds^2 < 0$ — пространственноподобным интервалом, $ds^2 = 0$ — световым (изотропным) интервалом, то эти понятия тоже абсолютны. И поэтому всякого рода преобразования координат не могут нарушить этого абсолютизма.

Ранее мы нашли формулы преобразования Лоренца для случая, когда движение одной системы координат относительно другой происходило с постоянной скоростью вдоль оси X. В заключение этого параграфа мы найдем формулы преобразования для произвольной постоянной скорости $\mathbf{v}$.

Обозначим через X, Y, Z компоненты вектора $\mathbf{R}$. Совершим преобразование Галилея:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{v}T; \quad t = T.$$

Выражение для интервала (2.11) примет в этих переменных следующий вид:

$$ds^2 = c^2\, dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - 2\mathbf{v}\, d\mathbf{r}\, dt - d\mathbf{r}^2.$$

Введем обозначение

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Тогда выражение для интервала можно записать в виде

$$ds^2 = c^2 \left[\frac{1}{\gamma}\, dt - \frac{\gamma}{c^2}\, \mathbf{v}\, d\mathbf{r}\right]^2 - d\mathbf{r}^2 - \frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\, d\mathbf{r})^2.$$

Наша основная цель — найти такие новые переменные T' и $\mathbf{R}'$, в которых полученное выше выражение для интервала можно записать в диагональной форме:

$$ds^2 = c^2 (dT')^2 - (d\mathbf{R}')^2.$$

Введем новое время T':

$$T' = t\,\frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{c^2}\, \mathbf{v}\mathbf{r}.$$

Выражая правую часть с помощью преобразования Галилея через переменные T и $\mathbf{R}$, имеем

$$T' = \gamma\left(T - \frac{\mathbf{vR}}{c^2}\right).$$

Отрицательную часть интервала также выразим через переменные T и $\mathbf{R}$:

$$(d\mathbf{r})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\,d\mathbf{r})^2 =$$
$$= (d\mathbf{R})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\,d\mathbf{R})^2 - 2\gamma^2\mathbf{v}\,d\mathbf{R}\,dT + \gamma^2 v^2 (dT)^2.$$

Легко убедиться в том, что первые два члена можно записать в виде квадрата некоторого вектора:

$$(d\mathbf{R})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\,d\mathbf{R})^2 = \left[d\mathbf{R} + (\gamma - 1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\,d\mathbf{R})}{v^2}\right]^2.$$

Следовательно,

$$(d\mathbf{r})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\,d\mathbf{r})^2 =$$
$$= \left[d\mathbf{R} + (\gamma - 1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\,d\mathbf{R})}{v^2}\right]^2 - 2\gamma^2\mathbf{v}\,d\mathbf{R}\,dT + \gamma^2 v^2 (dT)^2,$$

но правая часть есть квадрат вектора

$$(d\mathbf{r})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\,d\mathbf{r})^2 = \left[d\mathbf{R} + (\gamma - 1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\,d\mathbf{R})}{v^2} - \gamma\mathbf{v}\,dT\right]^2.$$

Таким образом, пространственноподобная часть интервала принимает диагональный вид:

$$(d\mathbf{r})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\,d\mathbf{r})^2 = (d\mathbf{R}')^2,$$

где

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} + (\gamma - 1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{vR})}{v^2} - \gamma\mathbf{v}T.$$

Итак, мы получили формулы преобразования координат и времени для общего случая движения с постоянной скоростью $\mathbf{v}$

$$\begin{aligned} T' &= \gamma\left(T - \frac{(\mathbf{vR})}{c^2}\right); \\ \mathbf{R}' &= \mathbf{R} + (\gamma - 1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{vR})}{v^2} - \gamma\mathbf{v}T. \end{aligned} \qquad (3.11)$$

Используя преобразования Лоренца (3.9), легко получить формулы для сложения скоростей. Для этой цели продифференцируем (3.9) по переменной T:

$$\frac{dT'}{dT}=\frac{1-\frac{vV_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad V'_x\frac{dT'}{dT}=\frac{V_x-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

$$V'_y\frac{dT'}{dT}=V_y;\quad V'_z\frac{dT'}{dT}=V_z.$$

Подставляя первое выражение в последующие, получим

$$V'_x=\frac{V_x-v}{1-\frac{vV_x}{c^2}};\quad V'_y=\frac{V_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vV_x}{c^2}};\quad V'_z=\frac{V_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vV_x}{c^2}}. \tag{3.12}$$

Эти формулы впервые содержались уже в работе Пуанкаре [3].

Аналогично можно получить сложение скоростей и в общем случае. Для этой цели продифференцируем формулы (3.11) по переменной T:

$$\frac{dT'}{dT}=\gamma\left(1-\frac{(\mathbf{vV})}{c^2}\right);$$

$$\mathbf{V}'\frac{dT'}{dT}=\mathbf{V}+(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{vV})}{v^2}-\gamma\mathbf{v}.$$

Подставляя первое выражение во второе, получим

$$\mathbf{V}'=\frac{\mathbf{V}+(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{vV})}{v^2}-\gamma\mathbf{v}}{\gamma\left[1-\frac{(\mathbf{vV})}{c^2}\right]}. \tag{3.13}$$

Покажем теперь, что скорость одного тела по отношению к другому всегда меньше скорости света. Пусть, например, в некоторой инерциальной системе отсчета скорость первого тела равна $\mathbf{v}$, а второго $\mathbf{V}$. Возьмем систему отсчета, в которой скорость первого тела равна нулю, тогда в этой системе отсчета скорость второго тела будет $\mathbf{V}'$. Скорость $\mathbf{V}'$ и является относительной скоростью второго тела относительно первого. В этом легко убедиться, используя формулу

$$V'^2 = \frac{(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}\mathbf{V}]^2}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\mathbf{V}}{c^2}\right)^2}. \tag{3.14}$$

С помощью этого выражения получим следующее равенство:

$$1 - \frac{V'^2}{c^2} = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\mathbf{V}}{c^2}\right)^2}. \tag{3.15}$$

Отсюда, в частности, следует, что если

$$v^2 < c^2 \quad \text{и} \quad V^2 < c^2,$$

то и относительная скорость V' всегда меньше скорости света. Если относительная скорость двух тел бесконечно мала:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + d\mathbf{V},$$

то с помощью формулы (3.14) можно получить квадрат длины между двумя близкими точками в пространстве скоростей:

$$ds^2 = \frac{(c^2-v^2)(d\mathbf{V})^2 + (\mathbf{V}\,d\mathbf{V})^2}{(c^2-v^2)^2}c^2. \tag{3.16}$$

Полученное пространство скоростей является пространством Лобачевского. Все свойства этого пространства определяются выражением (3.16).

§ 4. Относительность времени и сокращение длины

Рассмотрим случай времениподобного интервала:

$$ds^2 = c^2\,dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 = \\ = c^2\,dT'^2 - dX'^2 - dY'^2 - dZ'^2 > 0.$$

Это выражение можно записать в виде

$$c^2\,dT^2 - d\mathbf{R}^2 = c^2\,dT'^2 - d\mathbf{R}'^2 > 0.$$

Так как интервал в рассматриваемом случае больше нуля, то существует такая система координат (скажем,