убедиться, используя формулу

$$V'^2 = \frac{(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}\mathbf{V}]^2}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\mathbf{V}}{c^2}\right)^2}. \tag{3.14}$$

С помощью этого выражения получим следующее равенство:

$$1-\frac{V'^2}{c^2} = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\mathbf{V}}{c^2}\right)^2}. \tag{3.15}$$

Отсюда, в частности, следует, что если

$$v^2 < c^2 \quad \text{и} \quad V^2 < c^2,$$

то и относительная скорость V' всегда меньше скорости света. Если относительная скорость двух тел бесконечно мала:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + d\mathbf{V},$$

то с помощью формулы (3.14) можно получить квадрат длины между двумя близкими точками в пространстве скоростей:

$$ds^2 = \frac{(c^2-v^2)(d\mathbf{V})^2 + (\mathbf{V}\,d\mathbf{V})^2}{(c^2-v^2)^2}c^2. \tag{3.16}$$

Полученное пространство скоростей является пространством Лобачевского. Все свойства этого пространства определяются выражением (3.16).

§ 4. Относительность времени и сокращение длины

Рассмотрим случай времениподобного интервала:

$$ds^2 = c^2\,dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 = \\ = c^2\,dT'^2 - dX'^2 - dY'^2 - dZ'^2 > 0.$$

Это выражение можно записать в виде

$$c^2\,dT^2 - d\mathbf{R}^2 = c^2\,dT'^2 - d\mathbf{R}'^2 > 0.$$

Так как интервал в рассматриваемом случае больше нуля, то существует такая система координат (скажем, штрихованная), в которой два бесконечно близких события происходят в одной точке пространства ($d\mathbf{R}'=0$). Тогда пространственно-временной интервал сводится к разности только времен в штрихованной системе:

$$c^2\,dT'^2=c^2\,dT^2\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{R}}{dT}\right)^2\right]=c^2\,dT^2\left[1-\frac{\mathbf{v}^2(T)}{c^2}\right],$$

где введена скорость $\mathbf{v}(T)=\frac{d\mathbf{R}}{dT}$. Отсюда можно определить, как связано изменение времени в штрихованной системе с изменением в нештрихованной для процесса, локализованного в штрихованной системе отсчета:

$$dT'=dT\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2(T)}{c^2}};$$

$$T_2'-T_1'=\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2(T)}{c^2}}\,dT. \tag{4.1}$$

Это выражение и служит проявлением относительности времени Эйнштейна. Именно Эйнштейн впервые получил эту формулу.

Надо сказать, что Лоренц, открыв свои знаменитые преобразования, полностью не осознал их значение, и следующий решительный шаг к построению специальной теории относительности сделали независимо друг от друга, но разными путями Пуанкаре и Эйнштейн. Первый — с точки зрения математического изучения групповых свойств четырехмерного пространства, второй — с помощью операционного анализа относительности времени. При этом, как отметил В. Паули [13] на конференции, посвященной 50-летию теории относительности: «И Эйнштейн, и Пуанкаре опирались на подготовительные работы Г. А. Лоренца, весьма близко подошедшего к окончательному результату, но не сумевшего сделать последний решительный шаг. В совпадении результатов, полученных независимо друг от друга Эйнштейном и Пуанкаре, я усматриваю глубокий смысл гармонии математического метода и анализа, проводимого с помощью мысленных экспериментов, опирающихся на всю совокупность данных физического опыта».

Однако окончательную формулировку и самое глубокое понимание того, что мы имеем здесь дело с единой геометрией пространства-времени, следуя Пуанкаре, дал Минковский. Пуанкаре и Минковский открыли нам геометрию пространства-времени, а именно — псевдоевклидову геометрию.

Возьмем другой пример, когда интервал между двумя событиями пространственноподобный: $ds^2 < 0$. В этом случае существует такая система отсчета, в которой эти два события одновременны: $dT' = 0$. Если эти события происходят в точках, лежащих на оси X, тогда пространственно-временной интервал будет иметь вид

$$ds^2 = -dX'^2, \tag{4.2}$$

т. е. сводится к чисто пространственному расстоянию. В любой другой системе отсчета имеем

$$ds^2 = c^2\,dT^2 - dX^2. \tag{4.3}$$

Вводя обозначения для длин отрезков, соединяющих точки, в которых происходят эти события,

$$dl_0^2 = dX^2; \quad dl^2 = dX'^2,$$

и приравнивая выражения (4.2) и (4.3), получим

$$c^2\,dT^2 + dl^2 = dl_0^2. \tag{4.4}$$

Отсюда непосредственно следует, что длина отрезка dl в штрихованной системе отсчета меньше длины отрезка dl_0 в нештрихованной системе отсчета: $dl < dl_0$. Используя обратные преобразования Лоренца (3.10), найдем, что

$$dT = \frac{dT' + \frac{v}{c^2}\,dX'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{4.5}$$

Поскольку $dT' = 0$, то, подставляя выражение (4.5) в соотношение (4.4), получим

$$dl = dl_0\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{4.6}$$

Мы видим, что это сокращение длины есть не что иное, как следствие структуры геометрии четырехмерного пространства-времени и способа измерения длины движущегося отрезка.

Следует отметить, что это сокращение длины, в отличие от обычно принятой точки зрения, не является сокращением Лоренца — Фицджеральда.

Разобранные примеры показывают нам, что интервал в четырехмерном мире не есть нечто абстрактное, что он вполне измерим. Если интервал времениподобный, мы всегда можем выбрать надлежащую систему координат и измерить его с помощью часов. Если интервал пространственноподобный, то, аналогично, выбрав соответствующую систему координат, измерим его с помощью линейки.

Давайте дадим теперь более общий и более полный анализ измерения длин отрезков и промежутков времени в инерциальных системах отсчета. Заметим сначала, что в каждой системе отсчета есть свое понятие длины отрезка, не обязательно предполагающее одновременное определение координат начала и конца отрезка. Наиболее наглядно это проявляется тогда, когда наблюдатель с линейкой покоится относительно измеряемого отрезка. В этом случае он может в момент времени T_1 посмотреть на начало отрезка и установить, что оно совпадает с делением X_1 линейки, а в момент $T_2 > T_1$ зафиксировать, что конец отрезка совпадает с делением $X_2 > X_1$ линейки. И, хотя показания X_1 и X_2 линейки взяты не одновременно ($T_2 - T_1 > 0$), длина отрезка, тем не менее, будет равна

$$l = X_2 - X_1.$$

Предположим теперь, что у нас имеются две инерциальные системы отсчета, движущиеся относительно друг друга со скоростью V, одну из которых условно назовем штрихованной, а другую — нештрихованной. Выберем далее в этих системах отсчета координаты (X, Y, Z, T) и (X', Y', Z', T') таким образом, чтобы, во-первых, метрика в них принимала вид (3.1) и (3.8) соответственно и, во-вторых, координатные оси в этих системах отсчета имели бы одинаковое направление. Не ограничивая общности, будем считать также, что относительная скорость V направлена вдоль оси X. Тогда координаты и время в этих системах отсчета будут связаны преобразованиями Лоренца (3.9) и (3.10).

Рассмотрим теперь какие-либо два события, координаты которых в нештрихованной системе отсчета следующие: (X_1, Y_1, Z_1, T_1) и (X_2, Y_1, Z_1, T_2). Для определенности будем считать, что $X_2 > X_1$, $T_2 > T_1$. Используя преобразования Лоренца (3.9), легко получить, что в штрихованной системе отсчета справедливы соотношения

$$X_2'-X_1'=\frac{X_2-X_1-V(T_2-T_1)}{\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

$$T_2'-T_1'=\frac{T_2-T_1-\frac{V}{c^2}(X_2-X_1)}{\sqrt{1-V^2/c}}.$$

Вводя обозначение

$$w=\frac{X_2-X_1}{T_2-T_1}\geqslant 0, \tag{4.7}$$

эти соотношения можно записать в виде

$$\begin{aligned} X_2'-X_1'&=(X_2-X_1)\frac{1-V/w}{\sqrt{1-V^2/c^2}};\\ T_2'-T_1'&=(T_2-T_1)\frac{1-Vw/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Величина интервала между событиями будет равна

$$s_{12}^2=c^2(T_2-T_1)^2-(X_2-X_1)^2. \tag{4.9}$$

Рассмотрим следующие два случая:

а) Пусть $s_{12}^2<0$.

В этом случае точка (X_2, Y_1, Z_1, T_2) находится вне светового конуса и $w>c$ в силу соотношений (4.7) и (4.9). Тогда $1-V/w>0$, и если $X_2-X_1>0$, то из первого выражения (4.8) следует, что $X_2'-X_1'>0$. Однако, хотя величина $X_2'-X_1'$ и является в этом случае знакоопределенной, длина отрезка $l'=X_2'-X_1'$ в штрихованной системе отсчета не обязательно будет сокращаться, а может быть и увеличенной по сравнению с длиной этого отрезка в нештрихованной системе отсчета.

Из формул (4.8), в частности, следует, что для двух событий, для которых величина w в нештрихованной системе отсчета удовлетворяет неравенству

$$w>\frac{c^2}{V}\left(1+\sqrt{1-V^2/c^2}\right),$$

длина отрезка в штрихованной системе всегда будет больше длины отрезка в нештрихованной системе отсчета. Для интервалов, у которых

$$\frac{w}{c}\gg 1,$$

имеем

$$(X_2'-X_1')=\frac{(X_2-X_1)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Для двух других событий, таких, что величина w удовлетворяет неравенству

$$c<w<\frac{c^2}{V}\left(1+\sqrt{1-V^2/c^2}\right),$$

длина отрезка в штрихованной системе всегда будет меньше длины отрезка в нештрихованной системе отсчета.

Таким образом, длины отрезков разных пространственноподобных интервалов, расположенных вдоль оси X в системе K, ведут себя с точки зрения системы отсчета K' по-разному: одни увеличиваются, другие сокращаются, поэтому, когда говорят о сокращении стержня при движении, это утверждение неправильно.

Заметим, что для двух событий, для которых

$$w=\frac{1+\sqrt{1-V^2/c^2}}{V}\,c^2,$$

длина отрезка не изменяется, а промежуток времени изменяет знак. Когда мы говорим о сокращении длины, то всегда должны иметь в виду, что сравниваем длины стержня в какой-либо системе отсчета с длиной стержня, измеренного в другой системе отсчета в один и тот же момент времени. Именно при таком измерении и можно говорить о сокращении длины. Такой способ измерения означает задание интервала

$$s_{12}^2=-l^2.$$

Таким образом, сокращение длины определяется не только свойством пространства-времени, но и нашим способом измерения, поэтому оно, в отличие от замедления времени локализованного процесса, не имеет такого физического значения.

Величина $T_2'-T_1'$ в рассматриваемом случае будет знаконеопределенной, даже если $T_2-T_1>0$:

$$T_2'-T_1'=\begin{cases}\text{больше нуля} & \text{при}\quad V<\dfrac{c^2}{w};\\[2mm] \text{меньше нуля} & \text{при}\quad V>\dfrac{c^2}{w};\\[2mm] 0 & \text{при}\quad V=\dfrac{c^2}{w}.\end{cases}$$

Таким образом, среди множества систем отсчета существует одна система $\left(V=\frac{c^2}{w}\right)$, в которой события происходят одновременно, и интервал будет иметь вид

$$s_{12}^2=-l'^2.$$

В этом случае из выражения (4.8) получаем знакомое нам уже соотношение

$$X_2'-X_1'=(X_2-X_1)\sqrt{1-V^2/c^2}.$$

б) Пусть $s_{12}^2>0$.

В этом случае точка (X_2, Y_1, Z_1, T_2) находится внутри светового конуса и $w<c$, поэтому если $T_2-T_1>0$, то во всех штрихованных системах отсчета промежуток времени $T_2'-T_1'$ в силу второго соотношения (4.8) оказывается строго больше нуля. Величина промежутка времени $T_2'-T_1'$ в рассматриваемом случае может быть как меньше, так и больше величины промежутка в нештрихованной системе отсчета. Действительно, если справедливо неравенство

$$\frac{c^2}{V}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)<w<c,$$

то временной промежуток между событиями в штрихованной системе отсчета будет меньше, чем в нештрихованной. Для случая же, когда

$$w<\frac{c^2}{V}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right),$$

наоборот, временной промежуток в штрихованной системе отсчета будет больше, чем в нештрихованной. Например, если $w\ll c$, то

$$T_2'-T_1'=\frac{T_2-T_1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Знак величины $X_2'-X_1'$ будет зависеть от знака величины $1-V/w$:

$$X_2'-X_1'=\left[\begin{array}{lll}\text{больше нуля,} & \text{если} & V<w;\\ \text{меньше нуля,} & \text{если} & V>w;\\ 0, & \text{если} & V=w.\end{array}\right.$$

Таким образом, среди множества штрихованных систем отсчета существует система ($V=w$), в которой оба события происходят в одной и той же точке, т. е. процесс в этой системе отсчета локализован. Тогда интервал в штрихованной системе отсчета имеет вид

$$s_{12}^2=c^2(T_2'-T_1')^2$$

и промежутки времени между рассматриваемыми событиями в штрихованной и нештрихованной системах отсчета будут связаны соотношением

$$T_2'-T_1'=(T_2-T_1)\sqrt{1-V^2/c^2}.$$

Это замедление времени имеет важное значение в природе. Именно благодаря этому мы можем создать (и создаем) при высоких энергиях пучки частиц со временем жизни 10^{-8} с и транспортируем их к экспериментальным установкам на многие сотни метров, тогда как по обычным представлениям, даже если бы они двигались со скоростями близкими к скорости света, они должны были бы пролететь не более 4 м.

Таким образом, если покоящаяся частица имеет время жизни τ_0, то при движении со скоростью V она пролетит в лабораторной системе отсчета расстояние, равное

$$L=\frac{V\tau_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Часто говорят, что время в движущейся инерциальной системе идет медленнее, чем в неподвижной. Это утверждение неправильно, ибо с точки зрения принципа относительности любая инерциальная система может рассматриваться или как неподвижная, или как движущаяся. В нашем случае речь шла не о ходе времени в разных системах отсчета, а об описании в разных инерциальных системах отсчета процесса, локализованного в штрихованной системе отсчета ($X_1'=X_2'$). Именно в той системе отсчета, в которой частица покоилась, и имела место пространственная локализация. В любой другой инерциальной системе отсчета акт рождения и распад частицы происходят в разных точках пространства. Наличие же пространственной части интервала ведет (в силу его инвариантности) к увеличению времени жизни частицы в лабораторной системе отсчета.

Мы видели выше, что если в некоторой инерциальной системе отсчета произошли два события в какой-либо точке пространства, но в разное время, то в любой другой инерциальной системе отсчета эти события происходят в разных точках пространства. Аналогично, если в одной инерциальной системе отсчета два события произошли одновременно, но в разных точках пространства, то в другой инерциальной системе отсчета эти события будут уже не одновременными.

Событие, происходящее в какой-либо точке пространства, в какой-то момент времени, является абсолютным. Так, например, если две частицы столкнулись в какой-то момент времени, то это событие в любой инерциальной системе отсчета будет одновременным и одноместным.

Заметим, что в классической механике любые два события, происшедшие в двух разных точках пространства и в разные моменты времени в одной инерциальной системе отсчета, будут одноместными в другой, если последняя согласно преобразованию Галилея движется со скоростью

$$V=\frac{X_2-X_1}{t_2-t_1}.$$

В классической механике это всегда возможно, поскольку в ней отсутствуют ограничения на величину скорости. В релятивистской теории это возможно осуществить лишь в том случае, если события связаны времениподобным интервалом

$$(X_2-X_1)^2<c^2(t_2-t_1)^2,$$

то есть когда

$$\frac{V^2}{c^2}<1.$$

В релятивистской теории интервалы между событиями разделены на три класса: изотропные, пространственноподобные и времениподобные. В классической физике такого разделения событий нет. В ней существует только один класс событий.

До сих пор мы рассматривали диагональные, т. е. галилеевы системы, где метрика имеет вид (2.13). Теперь сделаем следующий шаг в направлении общности и рассмотрим произвольную систему координат в псевдоевклидовом пространстве-времени:

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k; \quad i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{4.10}$$

Здесь $x^0 = ct$, а x^1, x^2, x^3—пространственные координаты, g_{ik}—метрический тензор. Из вида (4.10) следует, что он симметричен:

$$g_{ik} = g_{ki}.$$

Координаты x^i, входящие в выражение (4.10), здесь уже могут не иметь никакого физического смысла, а поэтому физические величины надо, вообще говоря, строить из них и метрического тензора пространства-времени.

Распишем выражение (4.10), выделив нулевые индексы:

$$ds^2 = c^2 g_{00}\,dt^2 + 2cg_{0\alpha}\,dx^\alpha\,dt + g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta;$$
$$\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3.$$

Теперь сделаем то же, что мы делали раньше при преобразовании Галилея: на основании первых двух членов построим положительную величину. Для этого прибавим и вычтем квадрат величины

$$\frac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}.$$

Тогда получим

$$ds^2 = c^2\left[\sqrt{g_{00}}\,dt + \frac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}\right]^2 - \left[-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right]dx^\alpha\,dx^\beta. \tag{4.11}$$

Таким образом, в произвольных системах координат мы имеем аналог времени

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt + \frac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}, \tag{4.12}$$

причем это «время» будет физическим.

Второй член в (4.11) есть не что иное, как квадрат расстояния между двумя точками в обычном трехмерном пространстве

$$dl^2 = \varkappa_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta, \tag{4.13}$$

где введен новый тензор

$$\varkappa_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}\,g_{0\beta}}{g_{00}}. \tag{4.14}$$

Все это мы проделали для псевдоевклидовой метрики; перехода к другой геометрии я не совершал, а просто изменил систему координат. Изменение системы координат не изменяет геометрию. Забегая вперед, скажу, что геометрия задается тензором Римана четвертого ранга, тензором кривизны. Для псевдоевклидовой геометрии тензор Римана равен нулю в любой допустимой системе координат. Следует также отметить, что в общем случае выражение (4.12) не является полным дифференциалом, так как оно содержит компоненты метрического тензора, который в общем случае является некоторой функцией координат и времени и не всегда удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\sqrt{g_{00}}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{g_{0\alpha}}{c\sqrt{g_{00}}};\quad \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}}=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{g_{0\beta}}{\sqrt{g_{00}}}, \qquad (4.15)$$

выполнение которых необходимо и достаточно для того, чтобы правая часть соотношения (4.12) являлась полным дифференциалом.

Поэтому, хотя интервал вида (4.10) в произвольной допустимой системе координат и может быть представлен в виде

$$ds^2=(df^0)^2-(df^1)^2-(df^2)^2-(df^3)^2,$$

величины df^i (x^0, x^1, x^2, x^3) в общем случае не будут являться полными дифференциалами. В том случае, если величины df^i (x^0, x^1, x^2, x^3) являются полными дифференциалами

$$df^i=\frac{\partial f^i}{\partial x^k}dx^k,$$

пространство-время имеет псевдоевклидову геометрию. Таким образом, метрические коэффициенты в этом случае имеют вид

$$g_{ik}=\frac{\partial f^0}{\partial x^i}\frac{\partial f^0}{\partial x^k}-\frac{\partial f^1}{\partial x^i}\frac{\partial f^1}{\partial x^k}-\frac{\partial f^2}{\partial x^i}\frac{\partial f^2}{\partial x^k}-\frac{\partial f^3}{\partial x^i}\frac{\partial f^3}{\partial x^k}.$$

Они выражаются через четыре произвольные функции f^0, f^1, f^2, f^3. Используя выражения для g_{ik}, получим

$$ds^2=g_{ik}\,dx^i\,dx^k=$$
$$=\left(\frac{\partial f^0}{\partial x^i}dx^i\right)^2-\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^i}dx^i\right)^2-\left(\frac{\partial f^2}{\partial x^i}dx^i\right)^2-\left(\frac{\partial f^3}{\partial x^i}dx^i\right)^2.$$

Для того чтобы найти общий вид метрических коэффициентов в инерциальной системе отсчета, выберем в трехмерном пространстве произвольные криволинейные координаты согласно преобразованию

$$x'^{\alpha}=f^{\alpha}(x^1,\ x^2,\ x^3) \tag{4.16}$$

и введем новое время

$$x'^{0}=f^{0}(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{4.17}$$

Преобразования (4.16) и (4.17) не выводят нас из заданной инерциальной системы отсчета, и мы их будем называть допустимыми преобразованиями в инерциальной системе отсчета. Тогда метрические коэффициенты в инерциальной системе отсчета примут наиболее общий вид:

$$g_{00}=\left(\frac{\partial f^0}{\partial x^0}\right)^2;\quad g_{0\alpha}=\frac{\partial f^0}{\partial x^0}\frac{\partial f^0}{\partial x^\alpha};$$

$$g_{\alpha\beta}=\frac{\partial f^0}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^0}{\partial x^\beta}-\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\beta}.$$

Поэтому в инерциальных системах отсчета метрический тензор $\varkappa_{\alpha\beta}$ будет иметь следующую структуру:

$$\varkappa_{\alpha\beta}=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\beta}.$$

Отсюда непосредственно следует, что компоненты физической скорости в инерциальных системах отсчета имеют вид

$$V^\alpha=\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau},$$

причем величина $d\tau$ является полным дифференциалом. В любой же неинерциальной системе отсчета величина $d\tau$ уже не будет полным дифференциалом.

Используя предыдущее выражение, получим

$$V=\frac{dl}{d\tau};\quad dl^2=\varkappa_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta. \tag{4.18}$$

В инерциальных системах отсчета и в отсутствие сил движение материальной точки является прямолинейным и равномерным:

$$x'^{\alpha}=x_0'^{\alpha}+V^\alpha(\tau-\tau_0).$$

Величины $d\tau$ и dl^2, определяемые формулами (4.12) и (4.13), мы назвали физическими, так как они не зависят от выбора системы координат в данной инерциальной системе отсчета, поскольку они инвариантны относительно преобразований (4.16) и (4.17).

§ 5. Инвариантность уравнений Максвелла—Лоренца и закон преобразования электромагнитного поля

Выше мы выяснили, что электродинамика открыла нам единство пространства и времени и установила, что геометрия пространства-времени псевдоевклидова, а ее метрический тензор в галилеевых координатах равен

$$g_{00}=1;\ g_{11}=-1;\ g_{22}=-1;\ g_{33}=-1;\ g_{ik}=0,\ \text{если}\ i\neq k. \tag{5.1}$$

Преобразования координат, которые оставляют метрические коэффициенты неизменными, называют движением метрики. Все движения этой метрики образуют группу. Преобразования координат, которые оставляют метрику форминвариантной, будут лоренцевыми преобразованиями:

$$x'^i=a^i_k x^k;\quad i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Возьмем дифференциал от левой и правой частей:

$$dx'^i=a^i_k\,dx^k. \tag{5.2}$$

Здесь и всегда по повторяющимся индексам проводится суммирование. Систему функций, преобразующихся как дифференциал, называют контравариантным четырехмерным вектором (4-вектором):

$$A'^i=\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}A^k. \tag{5.3}$$

Введем понятие ковариантного вектора. Напомню, что самым простым объектом является поле скаляра, которое в любой системе координат определяется одной функцией и преобразуется следующим образом:

$$\Psi'(x')=\Psi(x(x')).$$