Величины $d\tau$ и dl^2, определяемые формулами (4.12) и (4.13), мы назвали физическими, так как они не зависят от выбора системы координат в данной инерциальной системе отсчета, поскольку они инвариантны относительно преобразований (4.16) и (4.17).

§ 5. Инвариантность уравнений Максвелла — Лоренца и закон преобразования электромагнитного поля

Выше мы выяснили, что электродинамика открыла нам единство пространства и времени и установила, что геометрия пространства-времени псевдоевклидова, а ее метрический тензор в галилеевых координатах равен

$$g_{00}=1;\ g_{11}=-1;\ g_{22}=-1;\ g_{33}=-1;\ g_{ik}=0,\ \text{если } i\neq k. \tag{5.1}$$

Преобразования координат, которые оставляют метрические коэффициенты неизменными, называют движением метрики. Все движения этой метрики образуют группу. Преобразования координат, которые оставляют метрику форминвариантной, будут лоренцевыми преобразованиями:

$$x'^i=a^i_k x^k;\quad i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Возьмем дифференциал от левой и правой частей:

$$dx'^i=a^i_k\,dx^k. \tag{5.2}$$

Здесь и всегда по повторяющимся индексам проводится суммирование. Систему функций, преобразующихся как дифференциал, называют контравариантным четырехмерным вектором (4-вектором):

$$A'^i=\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}A^k. \tag{5.3}$$

Введем понятие ковариантного вектора. Напомню, что самым простым объектом является поле скаляра, которое в любой системе координат определяется одной функцией и преобразуется следующим образом:

$$\Psi'(x')=\Psi(x(x')).$$

Градиент скалярной функции преобразуется по закону

$$\frac{\partial \Psi'(x')}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x^k}.$$

Систему функций, преобразующихся как градиент скалярной функции, называют ковариантным вектором

$$A'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A_k. \tag{5.4}$$

Произведение ковариантного вектора на контравариантный является инвариантом относительно преобразований координат

$$A'_i B'^i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} A_k B^l = A_k B^k.$$

Между ковариантным и контравариантным векторами имеется следующая связь:

$$A_i = g_{ik} A^k; \quad A^i = g^{ik} A_k. \tag{5.5}$$

Отсюда следует

$$g_{ik} g^{kl} = \delta^l_k; \quad \delta^l_k = 1 \text{ при } l = k, \quad \delta^l_k = 0 \text{ при } l \neq k. \tag{5.6}$$

Введем понятие тензора второго ранга как простое обобщение вектора. Контравариантный тензор второго ранга

$$A'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} A^{lm}. \tag{5.7}$$

Ковариантный тензор второго ранга

$$A'_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} A_{lm}. \tag{5.8}$$

Смешанный тензор второго ранга

$$A'^i_k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} A^l_m. \tag{5.9}$$

Поскольку мы рассматриваем лишь линейные преобразования, то легко показать, что

$$\frac{\partial A'_j}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial A_k}{\partial x^l}. \tag{5.10}$$

Отсюда следует, что производная от ковариантного вектора является ковариантным тензором второго ранга. Подъем и опускание индексов у тензора также осуществляется с помощью метрического тензора. Покажем теперь, что уравнения Максвелла—Лоренца имеют одинаковый вид во всех системах координат, где метрические коэффициенты

$$g_{00}=1;\quad g_{11}=-1;\quad g_{22}=-1;\quad g_{33}=-1;\quad g_{ik}=0; \quad \text{если } i\neq k, \tag{5.11}$$

остаются неизменными. Это означает, что уравнения Максвелла—Лоренца инвариантны относительно группы движения метрики.

Для того чтобы все это установить, необходимо просто записать уравнения Максвелла—Лоренца через векторы и тензоры четырехмерного пространства-времени. Но, прежде чем к этому приступить, выразим поля **E** и **H** через скалярный и векторный потенциалы Φ и **A**:

$$\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A};\quad \mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\Phi. \tag{5.12}$$

Тогда для потенциалов **A** и Φ будем иметь следующие уравнения:

$$\Box\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j};\quad \Box\Phi=-4\pi\rho;\quad \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{A}=0. \tag{5.13}$$

Из этих уравнений следует закон сохранения заряда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}=0. \tag{5.14}$$

Для того чтобы это уравнение было инвариантным относительно преобразований Лоренца, необходимо, чтобы плотность заряда ρ и ток **j** являлись компонентами четырехмерного контравариантного вектора S^i:

$$S^i=(c\rho,\ \mathbf{j}). \tag{5.15}$$

Тогда уравнение непрерывности запишем в виде

$$\frac{\partial S^i}{\partial x^i}=0. \tag{5.16}$$

Таким образом, плотность заряда преобразуется так же, как время, а ток **j** как вектор **R**. Учитывая выражение (5.15) для тока S^i, уравнения для векторного **A** и скалярного Ф потенциалов запишем в виде

$$\Box\,\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{S},$$

$$\Box\,\Phi = -\frac{4\pi}{c}S^0.$$

Для того чтобы эти уравнения не изменялись при преобразованиях Лоренца, необходимо, чтобы скалярный Ф и векторный **A** потенциалы являлись компонентами четырехмерного контравариантного вектора A^i

$$A^i = (\Phi,\ \mathbf{A}). \tag{5.17}$$

Тогда уравнение для вектора A^i принимает вид

$$\Box\,A^i = -\frac{4\pi}{c}S^i. \tag{5.18}$$

Поскольку $A_i = g_{ik}A^k$, имеем

$$A_i = (\Phi,\ -A_x,\ -A_y,\ -A_z) = (\Phi,\ -\mathbf{A}). \tag{5.19}$$

Введем антисимметричный тензор

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \tag{5.20}$$

Тогда всегда

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \tag{5.21}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} -H_x &= F_{23}; & -H_y &= F_{31}; & -H_z &= F_{12}; \\ -E_x &= F_{10}; & -E_y &= F_{20}; & -E_y &= F_{30}, \end{aligned} \tag{5.22}$$

легко убедиться, что написанная выше система уравнений объединяет пару уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0.$$

Введем 4-вектор

$$d^i = \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}, \tag{5.23}$$

где тензор F^{ik} связан с компонентами полей **E** и **H** следующей зависимостью:

$$\begin{aligned} -H_x &= F^{23}; & -H_y &= F^{31}; & -H_z &= F^{12}; \\ E_x &= F^{10}; & E_y &= F^{20}; & E_z &= F^{30}. \end{aligned}$$

Чтобы эта система уравнений совпадала со второй парой уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

необходимо считать, что

$$d^0 = -\frac{4\pi}{c} S^0; \quad d^\nu = -\frac{4\pi}{c} S^\nu,$$

где $\nu = 1, 2, 3$.

Таким образом, вся система уравнений Максвелла — Лоренца записывается в тензорной форме в четырехмерном пространстве-времени:

$$\begin{gathered} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} S^i; \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0; \\ \frac{\partial S^i}{\partial x^i} = 0; \quad F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \end{gathered} \tag{5.24}$$

Напишем теперь формулы преобразования для различных физических величин при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой в галилеевых координатах. Для простоты мы будем считать, что система K' движется относительно системы отсчета K с постоянной скоростью V вдоль оси X. Закон преобразования контравариантного вектора A^i аналогичен закону преобразования координатного вектора $x^i = (cT, X, Y, Z)$

$$\begin{gathered} A'^0 = \gamma\left(A^0 - \frac{V}{c} A^1\right); \quad A'^1 = \gamma\left(A^1 - \frac{V}{c} A^0\right); \\ A'^2 = A^2; \quad A'^3 = A^3. \end{gathered} \tag{5.25}$$

Используя эти формулы, мы найдем закон преобразования заряда и тока:

$$\begin{gathered} \rho' = \gamma\rho\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right); \quad \rho' v'_x = \gamma\rho(v_x - V); \\ \rho' v'_y = \rho v_y; \quad \rho' v'_z = \rho v_z. \end{gathered} \tag{5.26}$$

Впервые эти формулы были получены Пуанкаре. Подставляя ρ' из первой формулы в остальные, получим закон преобразования скоростей:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}; \quad v'_y = \gamma^{-1} \frac{v_y}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}; \quad v'_y = \gamma^{-1} \frac{v_z}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}. \tag{5.27}$$

Так как $A^i=(\Phi, \mathbf{A})$, то для скалярного и векторного потенциалов будут следующие формулы:

$$\Phi'=\gamma\left(\Phi-\frac{V}{c}A_x\right);\quad A'_x=\gamma\left(A_x-\frac{V}{c}\Phi\right);\quad A'_y=A_y;\quad A'_z=A_z. \tag{5.28}$$

Эти формулы также были получены впервые Пуанкаре.

Закон преобразования компонент антисимметричного тензора F^{ik} совпадает с формулами преобразования тензора, построенного из векторов B^i и C^k:

$$B^iC^k-C^iB^k.$$

Поскольку формулы для преобразования векторов нам известны, легко получить формулы и для преобразования компонент антисимметричного тензора F^{ik}:

$$F'^{12}=\gamma\left(F^{12}-\frac{V}{c}F^{02}\right);\quad F'^{02}=\gamma\left(F^{02}-\frac{V}{c}F^{12}\right).$$

Аналогично

$$F'^{13}=\gamma\left(F^{13}-\frac{V}{c}F^{03}\right);\quad F'^{03}=\gamma\left(F^{03}-\frac{V}{c}F^{13}\right). \tag{5.29}$$

Две другие компоненты остаются без изменения:

$$F'^{01}=F^{01};\quad F'^{23}=F^{23}.$$

Вспоминая связь между компонентами тензора F^{ik} и компонентами электрического и магнитного полей, из этих формул найдем закон преобразования для компонент электрического поля

$$E'_x=E_x;\quad E'_y=\gamma\left(E_y-\frac{V}{c}H_z\right);\quad E'_z=\gamma\left(E_z+\frac{V}{c}H_y\right) \tag{5.30}$$

и для компонент магнитного поля

$$H'_x=H_x;\quad H'_y=\gamma\left(H_y+\frac{V}{c}E_z\right);\quad H'_z=\gamma\left(H_z-\frac{V}{c}E_y\right). \tag{5.31}$$

Эти формулы впервые были открыты Лоренцем, однако он не установил их группового характера. Это впервые сделал Пуанкаре.

Из формул преобразования для электрического и магнитного полей следует, что если, например, в системе отсчета K' магнитное поле равно нулю, то в другой системе отсчета оно уже отлично от нуля и равно

$$H_y = -\frac{V}{c} E_z; \quad H_z = \frac{V}{c} E_y \quad \text{или} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{VE}]. \tag{5.32}$$

Аналогично, если электрическое поле равно нулю в системе K', то в системе K оно отлично от нуля и равно

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{VH}]. \tag{5.33}$$

Из компонент поля можно построить две комбинации, инвариантные относительно преобразований Лоренца

$$E^2 - H^2 = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}; \quad \mathbf{EH} = \frac{1}{4} F^*_{ik} F^{ik}, \tag{5.34}$$

где $F^{*ik} = \frac{1}{2} \varepsilon^{iklm} F_{lm}$; $\varepsilon^{iklm} = -\varepsilon^{kilm} = \varepsilon^{klim} = -\varepsilon^{klmi}$; $\varepsilon^{0123} = 1$ (ε^{iklm} — тензор Леви-Чивита). Эти инварианты электромагнитного поля впервые открыл Пуанкаре. Отсюда, в частности, следует, что если в системе K поля **E** и **H** перпендикулярны друг другу, но не равны, то всегда можно найти такую систему отсчета, в которой поле будет чисто электрическим или чисто магнитным в зависимости от знака первого инварианта. Поля **E** и **H**, взаимно перпендикулярные в одной системе отсчета, остаются таковыми в любой другой системе отсчета.

Получим теперь для 4-вектора тока другое выражение. Рассмотрим инвариант

$$S_i S^i = c^2 \rho^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right). \tag{5.35}$$

Обозначим через ρ_0 плотность заряда в системе отсчета, где заряд покоится, тогда

$$c^2 \rho^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = c^2 \rho_0^2.$$

Отсюда имеем

$$\rho = \gamma \rho_0. \tag{5.36}$$

Введем вектор скорости

$$U^i = (c\gamma, \ \gamma \mathbf{v}); \quad U_i U^i = c^2, \tag{5.37}$$

компоненты которого преобразуются так же, как время и координаты. Такую величину впервые ввел Пуанкаре. Уравнение сохранения заряда можно теперь записать в виде

$$\frac{\partial (\rho_0 U^i)}{\partial x^i} = 0. \tag{5.38}$$

Теперь найдем закон преобразования силы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Выражение для силы Лоренца, отнесенной к единице объема, в системе отсчета K имеет вид

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{E} + \rho \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \ \mathbf{H}]. \tag{5.39}$$

Тогда в системе отсчета K' мы должны иметь аналогичное выражение

$$\mathbf{F}' = \rho' \mathbf{E}' + \rho' \frac{1}{c} [\mathbf{u}', \ \mathbf{H}']. \tag{5.40}$$

Выражая штрихованные переменные через нештрихованные, получим закон преобразования для силы

$$\begin{gathered} F'_x = \gamma \left(F_x - \frac{V}{c} F \right); \\ F'_y = F_y; \quad F'_z = F_z; \\ F' = \gamma \left(F - \frac{V}{c} F_x \right). \end{gathered} \tag{5.41}$$

Здесь мы обозначили через F выражение

$$F = \frac{1}{c} (\mathbf{uF}). \tag{5.42}$$

Эти формулы были впервые найдены Пуанкаре. Мы видим из них, что трехмерный скаляр F и вектор $\mathbf{F}$ преобразуются так же, как компоненты (X^0, $\mathbf{X}$). Установим теперь закон преобразования силы, отнесенной к единице заряда

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{uH}]; \quad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{\rho}. \tag{5.43}$$

Используя формулы (5.41) и (5.42), найдем

$$\begin{gathered} f'_x = \gamma \frac{\rho}{\rho'} \left(f_x - \frac{V}{c} f \right); \quad f' = \gamma \frac{\rho}{\rho'} \left(f - \frac{V}{c} f_x \right); \\ f'_y = \frac{\rho}{\rho'} f_y; \quad f'_z = \frac{\rho}{\rho'} f_z, \end{gathered} \tag{5.44}$$

где $f=\frac{1}{c}(\mathbf{uf})$. Из ранее приведенной формулы (5.26) для преобразования плотности имеем

$$\frac{\rho}{\rho'}=\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{u_xV}{c^2}}. \tag{5.45}$$

Для дальнейшего нам необходимо ввести относительную скорость и воспользоваться формулой (3.15). Однако эту формулу легко получить, если воспользоваться понятием 4-вектора скорости. Возьмем два тела, и пусть вектор скорости каждого из них в некоторой инерциальной системе отсчета K имеет компоненты

$$U_1=(c\gamma_1,\ \mathbf{V}_1\gamma_1);\quad U_2=(c\gamma_2,\ \mathbf{V}_2\gamma_2).$$

Тогда в системе K', в которой первое тело покоится, имеем

$$U_1=(c,\ 0);\quad U_2=(c\gamma,\ \mathbf{V}\gamma).$$

Поскольку величина

$$U_{1_i}U_2^i$$

является инвариантом, то, вычисляя ее в системах K и K', имеем

$$1-\frac{V^2}{c^2}=\frac{(1-V_1^2/c^2)\,(1-V_2^2/c^2)}{\left(1-\frac{\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2}{c^2}\right)^2},$$

откуда

$$V^2=\frac{(\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2)^2-[\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2]^2/c^2}{\left(1-\frac{\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2}{c^2}\right)^2}.$$

Применяя предыдущую форму для нашего случая, имеем для скорости u'^2 в системе отсчета K' следующее выражение:

$$\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-V^2/c^2}\,\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\frac{u_xV}{c^2}}. \tag{5.46}$$

Используя его, получим

$$\frac{\rho}{\rho'}=\frac{\sqrt{1-u'^2/c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{5.47}$$

Подставляя это выражение в формулы преобразования (5.44) и вводя обозначения

$$\boldsymbol{\mathfrak{N}} = \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}; \quad \mathfrak{N} = \frac{f}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \tag{5.48}$$

найдем

$$\begin{gathered}\mathfrak{N}'_x = \gamma\left(\mathfrak{N}_x - \frac{V}{c}\mathfrak{N}\right); \quad \mathfrak{N}' = \gamma\left(\mathfrak{N} - \frac{V}{c}\mathfrak{N}_x\right); \\ \mathfrak{N}'_y = \mathfrak{N}_y; \quad \mathfrak{N}'_z = \mathfrak{N}_z.\end{gathered} \tag{5.49}$$

Мы видим, что геометрический объект $\{\mathfrak{N}, \boldsymbol{\mathfrak{N}}\}$ преобразуется так же, как $\{x^0, \mathbf{x}\}$. Такую величину впервые ввел Пуанкаре. Ее обычно называют 4-вектором силы

$$\mathfrak{N}^i = (\mathfrak{N}, \boldsymbol{\mathfrak{N}}). \tag{5.50}$$

Запишем теперь силу Лоренца в четырехмерном виде. Легко убедиться, что

$$F^i = \frac{1}{c} F^{ik} S_k. \tag{5.51}$$

Отсюда непосредственно следует, если учесть формулы (5.15) и (5.23), что

$$\mathbf{F} = \rho\mathbf{E} + \frac{\rho}{c}[\mathbf{uH}]; \quad F^0 = \frac{1}{c}(\mathbf{uF}).$$

Аналогично для 4-вектора силы имеем

$$\mathfrak{N}^i = \frac{1}{c} F^{ik} U_k. \tag{5.52}$$

Таким образом, вся система уравнений электродинамики, включая и силу Лоренца, записывается через векторы и тензоры четырехмерного пространства-времени. Представления о пространстве-времени, которые открыты на основе изучения электромагнитных явлений, можно теперь как гипотезу распространить на все физические явления и, в первую очередь, на механические. Это находится в полном соответствии с принципом относительности — в природе невозможно абсолютное движение. Отсюда следует, что уравнения механики Ньютона должны быть изменены так, чтобы новые уравнения механики были инвариантны относительно преобразований Лоренца. Это проще всего сделать, если записать их в четырехмерном виде. Хотя мы выше и имели дело только с электродинамикой, тем не менее ряд формул, полученных нами, имеет общий характер. Это относится, в первую очередь, к понятиям

4-вектора скорости (5.37) и 4-вектора силы (5.48) и (5.49).

Перейдем к построению релятивистских уравнений механики.

§ 6. Релятивистская механика Пуанкаре

Воспользуемся 4-вектором скорости (5.37) и введем 4-вектор импульса частицы

$$p^i = mU^i, \quad p_i p^i = m^2 c^2. \tag{6.1}$$

Поскольку скорость частицы всегда меньше c, определим инвариантное время $d\tau$:

$$ds^2 = c^2\, d\tau^2 = c^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) dt^2. \tag{6.2}$$

Производная от 4-вектора скорости по инвариантному времени τ также будет 4-вектором. Его обычно называют 4-вектором ускорения.

Принимая во внимание определение 4-вектора силы (5.48), релятивистские уравнения механики будут

$$m \frac{dU^i}{d\tau} = \mathfrak{R}^i, \tag{6.3}$$

или, в трехмерном виде,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{V}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right) = \mathbf{f}; \tag{6.4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\right) = (\mathbf{V}\mathbf{f}). \tag{6.5}$$

Эти уравнения впервые открыл Пуанкаре, он и является создателем релятивистской механики.

Второе из них можно получить из первого, умножая обе части уравнения на вектор $\mathbf{V}$. Из (6.4) и (6.5) легко определить импульс $\mathbf{p}$ и энергию E частицы

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{6.6}$$

Тогда

$$p^i = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right). \tag{6.7}$$