4-вектора скорости (5.37) и 4-вектора силы (5.48) и (5.49).

Перейдем к построению релятивистских уравнений механики.

§ 6. Релятивистская механика Пуанкаре

Воспользуемся 4-вектором скорости (5.37) и введем 4-вектор импульса частицы

$$p^i = mU^i, \quad p_i p^i = m^2c^2. \tag{6.1}$$

Поскольку скорость частицы всегда меньше c, определим инвариантное время $d\tau$:

$$ds^2 = c^2\, d\tau^2 = c^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) dt^2. \tag{6.2}$$

Производная от 4-вектора скорости по инвариантному времени τ также будет 4-вектором. Его обычно называют 4-вектором ускорения.

Принимая во внимание определение 4-вектора силы (5.48), релятивистские уравнения механики будут

$$m\frac{dU^i}{d\tau} = \mathfrak{N}^i, \tag{6.3}$$

или, в трехмерном виде,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{V}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right) = \mathbf{f}; \tag{6.4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\right) = (\mathbf{V}\mathbf{f}). \tag{6.5}$$

Эти уравнения впервые открыл Пуанкаре, он и является создателем релятивистской механики.

Второе из них можно получить из первого, умножая обе части уравнения на вектор $\mathbf{V}$. Из (6.4) и (6.5) легко определить импульс $\mathbf{p}$ и энергию E частицы

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{6.6}$$

Тогда

$$p^i = \left(\frac{E}{c}, \ \mathbf{p}\right). \tag{6.7}$$

Легко убедиться в том, что

$$\Re^i p_i = 0. \tag{6.8}$$

Выражения (6.6) для импульса и энергии можно получить и с помощью функции Лагранжа, если определить ее следующим образом:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - V^2/c^2}. \tag{6.9}$$

Тогда импульс $\mathbf{p}$ равен

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \tag{6.10}$$

а поскольку гамильтониан H равен

$$H = \mathbf{V}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} - L, \tag{6.11}$$

имеем

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \text{или} \quad E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{6.12}$$

Функция действия для частицы имеет вид

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt, \tag{6.13}$$

или, если учесть, что в галилеевых координатах

$$ds = c\,dt\sqrt{1 - V^2/c^2},$$

имеем

$$S = -mc\int_a^b ds. \tag{6.14}$$

Функцию Лагранжа (6.9) впервые построил Пуанкаре. Здесь интеграл берется между двумя фиксированными точками вдоль мировой линии. В произвольной допустимой системе координат интервал имеет вид

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k, \tag{6.15}$$

а, следовательно, функция Лагранжа для частицы будет

$$L = -mc^2\sqrt{g_{00} + \frac{1}{c}\, 2g_{0\alpha}\dot{x}^\alpha + \frac{1}{c^2}\, g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}. \tag{6.16}$$

Отсюда, обобщенные импульсы будут равны

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} = (mc^2)^2 \frac{\frac{1}{c} g_{0\alpha} + \frac{1}{c^2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^{\beta}}{L}. \tag{6.17}$$

Функция Гамильтона вычисляется обычным образом:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} \dot{x}^{\alpha} - L. \tag{6.18}$$

Принимая во внимание, что

$$\dot{x}^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} = L - (mc^2)^2 \frac{g_{00} + \frac{1}{c} g_{0\beta} \dot{x}^{\beta}}{L},$$

найдем

$$H = -(mc^2)^2 \frac{g_{00} + \frac{1}{c} g_{0\beta} \dot{x}^{\beta}}{L}. \tag{6.19}$$

Введем теперь 4-вектор импульса

$$p_i = mc g_{ik} \frac{dx^k}{ds}.$$

Здесь

$$p_0 = \frac{H}{c} \tag{6.20}$$

или

$$p^i = mc \frac{dx^i}{ds}. \tag{6.21}$$

Поскольку

$$g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 1, \tag{6.22}$$

имеем

$$g_{ik} p^i p^k = m^2 c^2. \tag{6.23}$$

Аналогично

$$g^{ik} p_i p_k = m^2 c^2. \tag{6.24}$$

Выразим теперь импульсы через частные производные от функции действия S по координатам и времени:

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}, \tag{6.25}$$

Подставляя эти выражения в (6.24), получим уравнение для геодезической линии в форме Гамильтона—Якоби

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}=m^2c^2. \tag{6.26}$$

Мы видим, что релятивистские уравнения для движения частицы, так же как и уравнения для фронта электромагнитной волны, содержат представления о структуре пространства-времени. В галилеевых координатах, где метрический тензор равен

$g_{00}=1$; $g_{11}=-1$; $g_{22}=-1$; $g_{33}=-1$; $g_{ik}=0$, если $i\neq k$,

уравнение для геодезической линии будет иметь вид

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2=m^2c^2. \tag{6.27}$$

Если вместо S ввести действие следующим образом:

$$S\to S-mc^2t,$$

то после замены, в пределе при $c\to\infty$, мы получим уравнение Гамильтона—Якоби в классической механике (1.14).

§ 7. Принцип стационарного действия в электродинамике

Многие уравнения теоретической физики получают из условия экстремума функционала, который называют действием. Нам необходимо и для электродинамики составить действие таким образом, чтобы его вариации по полям приводили к уравнениям Максвелла—Лоренца. Действие строится с помощью скалярных функций поля и тока.

Составим действие, которое содержит электромагнитное поле, а также взаимодействие его с зарядами и токами. Введем тензор электромагнитного поля

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \tag{7.1}$$

который в силу построения удовлетворяет уравнению Максвелла

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}=0. \tag{7.2}$$