Подставляя эти выражения в (6.24), получим уравнение для геодезической линии в форме Гамильтона—Якоби

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}=m^2c^2. \tag{6.26}$$

Мы видим, что релятивистские уравнения для движения частицы, так же как и уравнения для фронта электромагнитной волны, содержат представления о структуре пространства-времени. В галилеевых координатах, где метрический тензор равен

$g_{00}=1;\ g_{11}=-1;\ g_{22}=-1;\ g_{33}=-1;\ g_{ik}=0$, если $i\neq k$,

уравнение для геодезической линии будет иметь вид

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2=m^2c^2. \tag{6.27}$$

Если вместо S ввести действие следующим образом:

$$S\to S-mc^2t,$$

то после замены, в пределе при $c\to\infty$, мы получим уравнение Гамильтона—Якоби в классической механике (1.14).

§ 7. Принцип стационарного действия в электродинамике

Многие уравнения теоретической физики получают из условия экстремума функционала, который называют действием. Нам необходимо и для электродинамики составить действие таким образом, чтобы его вариации по полям приводили к уравнениям Максвелла—Лоренца. Действие строится с помощью скалярных функций поля и тока.

Составим действие, которое содержит электромагнитное поле, а также взаимодействие его с зарядами и токами. Введем тензор электромагнитного поля

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \tag{7.1}$$

который в силу построения удовлетворяет уравнению Максвелла

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}=0. \tag{7.2}$$

Потенциалы A_i мы и будем далее варьировать при получении других уравнений поля. Для дальнейшего нам понадобятся лишь два инварианта

$$A_i S^i; \quad F_{ik} F^{ik}. \tag{7.3}$$

Здесь S^i — четырехмерный вектор тока.

Как мы увидим далее, этих скалярных функций вполне достаточно, чтобы построить действие, вариация которого приводит ко второй паре уравнений Максвелла. Искомое действие будет иметь вид

$$S = \frac{1}{c} \int \mathfrak{L}\, d\Omega,$$

где $\mathfrak{L}$ — плотность функции Лагранжа, равная

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{c} A_i S^i - \frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik}, \text{ а } d\Omega = dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3. \tag{7.4}$$

При нахождении уравнений поля в функции действия мы будем варьировать лишь потенциалы поля, считая источники поля S^i заданными. Тогда

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} S^i\, \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik}\, \delta F_{ik} \right] d\Omega.$$

Выражая F_{ik} через потенциалы A_i, получим

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} S^i\, \delta A_i - \frac{1}{4\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right] d\Omega = 0.$$

Интегрируя во втором члене по частям и учитывая, что вариации потенциалов в начальный и конечный моменты времени равны нулю, а поле на бесконечности исчезает, найдем

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} S^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right] \delta A_i\, d\Omega = 0.$$

Поскольку вариации δA_i произвольны, имеем

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^{ik}} = -\frac{4\pi}{c} S^i. \tag{7.5}$$

Итак, наш выбор действия оправдан, поскольку мы точно получили вторую пару уравнений Максвелла. Однако необходимо иметь в виду, что выбор плотности функции Лагранжа в функции действия не является однозначным, поскольку легко убедиться, что добавление к плотности функции Лагранжа дополнительного члена типа четырехмерной дивергенции вектора не отражается на виде уравнений поля. В частности, заметим, что уравнения Максвелла (5.24) инвариантны при калибровочных преобразованиях потенциалов

$$A'_i = A_i + \frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{7.6}$$

где f — произвольная функция.

Построенная нами плотность Лагранжа $\mathfrak{L}$ не инвариантна, она изменяется при этих преобразованиях на четырехмерную дивергенцию вектора. Найдем теперь уравнения движения заряженных частиц в электромагнитном поле. Для их получения необходимо составить действие, которое содержит часть, относящуюся к частицам, а также известную уже часть, содержащую взаимодействие поля с частицами.

Так как для частиц

$$\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0); \quad \mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{7.7}$$

имеем

$$-\frac{1}{c^2}\int S^i A_i \, d\Omega = -\frac{e}{c}\int A_i dx^i, \tag{7.8}$$

действие для частиц в электромагнитном поле будет равно

$$S = -mc\int ds - \frac{e}{c}\int A_i dx^i. \tag{7.9}$$

Варьируя по координатам частицы, имеем

$$\delta S = -\int \left(mc\frac{dx_i}{ds} d\delta x^i + \frac{e}{c} A_i d\delta x^i + \frac{e}{c}\delta A_k dx^k \right) = 0.$$

Интегрируя в первых двух членах по частям и полагая вариации координат на концах равными нулю, получим

$$\delta S = \int \left(m\, du_i \delta x^i + \frac{e}{c} dA_i \, \delta x^i - \frac{e}{c}\delta A_k dx^k \right) = 0.$$

Подставляя в это выражение очевидные соотношения

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k; \quad \delta A_k = \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\delta x^i,$$

найдем

$$\int \left[m\frac{du_i}{ds} + \frac{e}{c^2}\frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^k - \frac{e}{c^2}\frac{\partial A_k}{\partial x^i} u^k \right] \delta x^i \, ds = 0,$$

откуда в силу произвольности вариаций δx^i имеем уравнение движения заряда в виде

$$mc\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{c}F_{ik}u^k \tag{7.10}$$

или

$$mc\frac{du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^{ik}u_k. \tag{7.11}$$

§ 8. Электродинамика в произвольных координатах

Прежде чем записать уравнения Максвелла в произвольных координатах, заметим, что обычная производная от вектора в этих переменных уже не является тензором второго ранга, как ранее было, когда мы имели дело лишь с координатами, для которых все метрические коэффициенты g_{ik} псевдоевклидова пространства-времени постоянны. Для дальнейшего необходимо ввести ковариантное дифференцирование. Определим ковариантное дифференцирование вектора таким образом, чтобы после дифференцирования мы получили тензор второго ранга.

Тогда ковариантная производная от ковариантного вектора равна

$$\nabla_i A_k=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\Gamma^s_{ki}A_s, \tag{8.1}$$

а от контравариантного вектора

$$\nabla_i A^k=\frac{\partial A^k}{\partial x^i}+\Gamma^k_{is}A^s, \tag{8.2}$$

где Γ^s_{kl}—символы Кристоффеля, определяемые выражением (8.5).

Ковариантную производную от тензора второго ранга мы определим следующим образом:

$$\nabla_i T_{kl}=\frac{\partial T_{kl}}{\partial x^i}-\Gamma^s_{ki}T_{sl}-\Gamma^s_{li}T_{ks} \tag{8.3}$$

для ковариантного тензора и

$$\nabla_i T^{kl}=\frac{\partial T^{kl}}{\partial x^i}+\Gamma^k_{si}T^{sl}+\Gamma^l_{si}T^{ks} \tag{8.4}$$

для контравариантного тензора.