откуда в силу произвольности вариаций δx^i имеем уравнение движения заряда в виде

$$mc\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{c}F_{ik}u^k \tag{7.10}$$

или

$$mc\frac{du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^{ik}u_k. \tag{7.11}$$

§ 8. Электродинамика в произвольных координатах

Прежде чем записать уравнения Максвелла в произвольных координатах, заметим, что обычная производная от вектора в этих переменных уже не является тензором второго ранга, как ранее было, когда мы имели дело лишь с координатами, для которых все метрические коэффициенты g_{ik} псевдоевклидова пространства-времени постоянны. Для дальнейшего необходимо ввести ковариантное дифференцирование. Определим ковариантное дифференцирование вектора таким образом, чтобы после дифференцирования мы получили тензор второго ранга.

Тогда ковариантная производная от ковариантного вектора равна

$$\nabla_i A_k=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\Gamma^s_{ki}A_s, \tag{8.1}$$

а от контравариантного вектора

$$\nabla_i A^k=\frac{\partial A^k}{\partial x^i}+\Gamma^k_{is}A^s, \tag{8.2}$$

где Γ^s_{kl} — символы Кристоффеля, определяемые выражением (8.5).

Ковариантную производную от тензора второго ранга мы определим следующим образом:

$$\nabla_i T_{kl}=\frac{\partial T_{kl}}{\partial x^i}-\Gamma^s_{ki}T_{sl}-\Gamma^s_{li}T_{ks} \tag{8.3}$$

для ковариантного тензора и

$$\nabla_i T^{kl}=\frac{\partial T^{kl}}{\partial x^i}+\Gamma^k_{si}T^{sl}+\Gamma^l_{si}T^{ks} \tag{8.4}$$

для контравариантного тензора.

Эти формулы для производных легко обобщаются на случай тензора произвольного ранга.

Символы Кристоффеля выражаются через метрические коэффициенты следующим образом:

$$\Gamma^k_{lm} = g^{kn}\Gamma_{n;\, lm};\quad \Gamma_{n;\, lm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^n}\right). \tag{8.5}$$

Контравариантным дифференцированием будем называть операцию

$$\nabla^i = g^{ik}\nabla_k. \tag{8.6}$$

Вычислим теперь ковариантную дивергенцию от вектора

$$\nabla_k A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \Gamma^k_{ki}A^i. \tag{8.7}$$

Здесь

$$\Gamma^k_{ki} = g^{ml}\Gamma_{m;\, li} = \frac{1}{2} g^{ml}\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i}.$$

Учитывая, что

$$g^{ml}\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^i}, \tag{8.8}$$

где g — детерминант, составленный из g_{ik}, получим

$$\Gamma^k_{ki} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{-g}. \tag{8.9}$$

Используя это выражение, имеем

$$\nabla_k A^k = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^k)}{\partial x^k}. \tag{8.10}$$

Перейдем теперь к записи уравнений Максвелла в криволинейных координатах пространства-времени. Введем тензор электромагнитного поля

$$F_{ik} = \nabla_k A_i - \nabla_i A_k = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \tag{8.11}$$

Мы видим, что члены с символами Кристоффеля взаимно сократились и не входят в выражение F_{ik} через потенциалы. Отсюда первая пара уравнений Максвелла может быть записана в обычной форме:

$$\nabla_i F_{kl} + \nabla_k F_{li} + \nabla_l F_{ik} = \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = 0. \tag{8.12}$$

Другая пара уравнений Максвелла имеет вид

$$\nabla_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c}\rho_0 u^i. \tag{8.13}$$

Уравнения движения заряженных частиц могут быть получены обобщением уравнения (7.10):

$$\mu_0 u^k \nabla_k u_i = \frac{\rho_0}{c} F_{il} u^l, \tag{8.14}$$

здесь μ_0 — плотность массы покоя.

Из уравнения (8.13) в силу антисимметрии тензора F^{ik} следует, что вектор $\rho_0 u^i$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_k(\rho_0 u^k) = 0. \tag{8.15}$$

Аналогично уравнению сохранения удовлетворяет и вектор $\mu_0 u^k$:

$$\nabla_k(\mu_0 u^k) = 0. \tag{8.16}$$

Плотность массы $\mu = \sqrt{-g}\,\mu_0 u^0$ называется сохраняющейся, поскольку интеграл от μ по объему не зависит от времени в силу (8.16).

Покажем теперь, что ковариантные уравнения Максвелла можно получить из вариации действия по переменным поля и частиц, если действие записать для произвольных координат. Переход в действии от галилеевых координат, в которых метрический тензор диагонален (1, —1, —1, —1), к криволинейным координатам, в которых метрические коэффициенты являются функциями координат, легко осуществляется с помощью простой замены переменных под интегралом и применением элементов тензорного анализа. Осуществляя эту процедуру, получим функцию действия в произвольных координатах

$$S = -\frac{1}{2}\int \sqrt{-g}\, d\Omega \left[\mu_0 c^2 + \frac{1}{c}\rho_0 u^i A_i + \frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik}\right]. \tag{8.17}$$

Заметим, что при любых преобразованиях координат величина

$$\sqrt{-g}\, dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3 \tag{8.18}$$

является инвариантом.

Приступим теперь, следуя Фоку, к получению ковариантных уравнений Максвелла и уравнений движения вещества, исходя из принципа стационарного действия. Для этой цели нам необходимо вычислить вариации величин u^α, ρ_0 и μ_0 при произвольных вариациях траектории частицы вещества. Обозначим через a_1, a_2, a_3 начальные координаты частицы вещества, а через p — параметр, характеризующий время. Выразим координаты частицы через новые переменные:

$$x^k = f^k(p, a_1, a_2, a_3); \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{8.19}$$

Эти функции дают при постоянных a_1, a_2, a_3 и переменном p движение данной частицы вещества. В дальнейшем при получении уравнений движения вещества мы будем варьировать по этим функциям:

$$\delta x^i = \delta f^i(p, a_1, a_2, a_3). \tag{8.20}$$

Компоненты четырехмерной скорости в новых переменных имеют вид

$$u^l = c\frac{\frac{\partial f^l}{\partial p}}{\sqrt{g_{ik}\frac{\partial f^i}{\partial p}\frac{\partial f^k}{\partial p}}}. \tag{8.21}$$

Легко убедиться, что

$$u_k u^k = g_{kl}u^k u^l = c^2. \tag{8.22}$$

Введем определение вариаций. Обозначим через $\delta_c u^i$ вариацию

$$\delta_c u^i = u'^i(x + \delta x) - u^i(x). \tag{8.23}$$

Вариация $\delta_c u^i$ не является вектором. Введем вариацию $\delta u^i(x)$, которая равна

$$\delta u^i(x) = u'^i(x) - u^i(x). \tag{8.24}$$

Легко убедиться, что

$$\delta u^i(x) = \delta_c u^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^k}\delta x^k. \tag{8.25}$$

Вычислим теперь вариацию δ_c от функции

$$\Phi = \sqrt{g_{ik}\frac{\partial f^i}{\partial p}\frac{\partial f^k}{\partial p}}. \tag{8.26}$$

Найдем

$$\delta_c \Phi = \frac{1}{c^2} \Phi u^i u^k \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l + g_{li} \frac{\partial \delta x^l}{\partial x^k} \right). \tag{8.27}$$

Применяя формулу для ковариантной производной

$$\nabla_i \delta x^k = \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{il} \delta x^l, \tag{8.28}$$

получим

$$\delta_c \left(\sqrt{g_{ik} \frac{\partial f^i}{\partial p} \frac{\partial f^k}{\partial p}} \right) = \frac{1}{c^2} \sqrt{g_{ik} \frac{\partial f^i}{\partial p} \frac{\partial f^k}{\partial p}}\, u_l u^m \nabla_m \delta x^l. \tag{8.29}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \delta x^i}{\partial p} = \frac{\partial f^k}{\partial p} \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^k}, \tag{8.30}$$

а также выражение (8.29), имеем

$$\delta_c u^i = u^k \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^k} - \frac{1}{c^2} u^i u_n u^k \nabla_k \delta x^n. \tag{8.31}$$

На основании (8.25) получим

$$\delta u^i (x) = u^k \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^k} - \delta x^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k} - \frac{1}{c^2} u^i u_n u^k \nabla_k \delta x^n, \tag{8.32}$$

или, в ковариантной форме,

$$\delta u^i (x) = u^n \nabla_n \delta x^i - \delta x^n \nabla_n u^i - \frac{1}{c^2} u^i u_k u^n \nabla_n \delta x^k. \tag{8.33}$$

Мы видим, что вариация δu^i является вектором. Используя уравнения непрерывности

$$\nabla_i (\rho_0 u^i) = 0; \quad \nabla_i (\mu_0 u^i) = 0, \tag{8.34}$$

найдем вариации $\delta\rho_0$ и $\delta\mu_0$. В силу определения вариации δ имеем

$$\nabla_i \delta (\rho_0 u^i) = 0. \tag{8.35}$$

Учитывая выражение (8.33), найдем

$$\delta (\rho_0 u^i) = u^i \left[\delta\rho_0 + \nabla_n (\rho_0 \delta x^n) - \frac{\rho_0}{c^2} u_k u^n \nabla_n \delta x^k \right] + \\ + \nabla_n (\rho_0 u^n \delta x^i - \rho_0 u^i \delta x^n). \tag{8.36}$$

Подставляя это выражение в (8.35), получим

$$\nabla_i u^i \left[\delta\rho_0 + \nabla_n (\rho_0 \delta x^n) - \frac{1}{c^2} \rho_0 u_k u^n \nabla_n \delta x^k \right] = 0, \tag{8.37}$$

откуда имеем

$$\delta\rho_0 = -\nabla_n(\rho_0\,\delta x^n) + \frac{1}{c^2}\rho_0 u_k u^n \nabla_n \delta x^k. \tag{8.38}$$

Аналогично

$$\delta\mu_0 = -\nabla_n(\mu_0\,\delta x^n) + \frac{1}{c^2}\mu_0 u_k u^n \nabla_n \delta x^k. \tag{8.39}$$

В силу (8.38) вариация тока равна

$$\delta(\rho_0 u^i) = \nabla_k(\rho_0 u^k\,\delta x^i - \rho_0 u^i\,\delta x^k). \tag{8.40}$$

С помощью соотношения (8.10) ее можно записать в виде

$$\delta(\rho_0 u^i) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{-g}\,(\rho_0 u^k\,\delta x^i - \rho_0 u^i\,\delta x^k)\right]. \tag{8.41}$$

На основании полученных вариаций для $\delta\rho_0$, $\delta\mu_0$, $\delta(\rho_0 u^i)$ легко получить общековариантные уравнения поля (8.13) и уравнения движения вещества (8.14). Для этой цели найдем вариацию от действия

$$S = -\frac{1}{c}\int\sqrt{-g}\,d\Omega\left[\mu_0 c^2 + \frac{1}{c}\rho_0 u^i A_i + \frac{1}{16\pi}F_{ik}F^{ik}\right], \tag{8.42}$$

причем вариации δx^j, δA_k на границе будем принимать равными нулю. Перейдем теперь к вычислению вариации

$$\delta S = -\delta\int\sqrt{-g}\,d\Omega\left[\mu_0 c + \frac{1}{c^2}\rho_0 u^i A_i + \frac{1}{16\pi c}F_{jk}F^{jk}\right] = 0. \tag{8.43}$$

Используя (8.39), найдем вариации от первого члена (8.43)

$$-\delta\int\sqrt{-g}\,d\Omega\,\mu_0 c = \frac{1}{c}\int\mu_0\delta x^j\,(u^k\nabla_k u_j)\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{8.44}$$

На основании (8.41) вариация от второго члена (8.43) будет равна

$$-\frac{1}{c^2}\delta\int\rho_0 u^i A_i\sqrt{-g}\,d\Omega = -\frac{1}{c^2}\int\rho_0 u^i\,(\delta A_i + F_{ki}\delta x^k)\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{8.45}$$

Найдем теперь вариацию от третьего члена (8.43)

$$-\frac{1}{16\pi c}\delta\int F_{ik}F^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = \\ = -\frac{1}{8\pi c}\int F^{ik}\left(\frac{\partial\delta A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial\delta A_i}{\partial x^k}\right)\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{8.46}$$

Интегрируя в (8.46) по частям и учитывая антисимметрию тензора F^{ik}, получим

$$-\frac{1}{16\pi c}\,\delta\int F_{ik}F^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega=-\frac{1}{4\pi c}\int\nabla_j F^{ij}\delta A_i\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{8.47}$$

Суммируя выражения (8.44), (8.45) и (8.47), найдем

$$\delta S=\frac{1}{c}\int\sqrt{-g}\,d\Omega\left[\delta x^k\left(\mu_0 u^i\nabla_i u_k-\frac{1}{c}\rho_0 F_{ki}u^i\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{4\pi}\nabla_i F^{ki}+\frac{1}{c}\rho_0 u^k\right)\delta A_k\right]=0. \tag{8.48}$$

Откуда в силу произвольности вариаций δx^i и δA_k имеем

$$\mu_0 u^i\nabla_i u^k=\frac{1}{c}\rho_0 F^{kj}u_j,$$

$$\nabla_i F^{ki}=-\frac{4\pi}{c}\rho_0 u^k.$$

Итак, из интеграла действия, записанного в произвольных координатах псевдоевклидова пространства-времени мы автоматически получили общековариантные уравнения поля и уравнения движения вещества. При этом, поскольку в галилеевых координатах мы исходили из диагонального метрического тензора (1, —1, —1, —1), наш вывод имеет чисто математический характер. Хотя запись уравнений в общековариантной форме есть математическая процедура, однако она существенно расширяет наши возможности описания физических явлений.

Если ранее уравнения позволяли описывать электромагнитные явления лишь в инерциальных системах отсчета (галилеевы координаты), то общековариантная запись уравнений позволяет описывать электромагнитные явления и в неинерциальных (ускоренных) системах отсчета. Таким образом, специальная теория относительности описывает явления как в инерциальных, так и в неинерциальных системах отсчета. Конечно, эти явления протекают существенно по-разному в неинерциальных системах отсчета, однако и в этом случае можно всегда указать бесконечную совокупность других неинерциальных систем отсчета, в которых явления протекают так же, как в исходной неинерциальной системе отсчета. Глубоко укоренившееся представление о том, что специальная теория относительности неприменима к ускоренным системам отсчета [8, 9, 11, 19, 64], является неправильным. На анализе этой проблемы мы в дальнейшем специально остановимся.

§ 9. Уравнения движения и законы сохранения в классической теории поля

Ранее мы видели, что с помощью лагранжева подхода можно построить все уравнения Максвелла. Этот подход имеет явный общековариантный характер. Он позволяет получить в общем виде уравнения движения поля и законы сохранения без явной конкретизации плотности функции Лагранжа. В этом подходе каждое физическое поле описывается одно- или многокомпонентной функцией координат и времени, называемой функцией поля (или полевой переменной). В качестве полевых переменных берутся величины, преобразующиеся по одному из представлений группы Лоренца, например скалярное, спинорное, векторное и даже тензорное. Наряду с полевыми переменными важную роль играет и метрический тензор пространства-времени, который определяет естественную геометрию для физического поля, а также выбор той или иной системы координат, в которой производится описание физических процессов. Выбор системы координат является в то же время и выбором системы отсчета. Конечно, не всякий выбор системы координат изменяет систему отсчета. Любые преобразования в данной системе отсчета вида

$$\begin{aligned} x'^0 &= f^0(x^0, x^1, x^2, x^3); \\ x'^\alpha &= f^\alpha(x^1, x^2, x^3); \quad \alpha = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{9.1}$$

всегда оставляют нас в этой системе отсчета. Всякий другой выбор системы координат обязательно приводит к изменению системы отсчета. Выбор систем координат производится из класса допустимых координат, в котором

$$g_{00} > 0, \quad g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta < 0. \tag{9.2}$$