укоренившееся представление о том, что специальная теория относительности неприменима к ускоренным системам отсчета [8, 9, 11, 19, 64], является неправильным. На анализе этой проблемы мы в дальнейшем специально остановимся.

§ 9. Уравнения движения и законы сохранения в классической теории поля

Ранее мы видели, что с помощью лагранжева подхода можно построить все уравнения Максвелла. Этот подход имеет явный общековариантный характер. Он позволяет получить в общем виде уравнения движения поля и законы сохранения без явной конкретизации плотности функции Лагранжа. В этом подходе каждое физическое поле описывается одно- или многокомпонентной функцией координат и времени, называемой функцией поля (или полевой переменной). В качестве полевых переменных берутся величины, преобразующиеся по одному из представлений группы Лоренца, например скалярное, спинорное, векторное и даже тензорное. Наряду с полевыми переменными важную роль играет и метрический тензор пространства-времени, который определяет естественную геометрию для физического поля, а также выбор той или иной системы координат, в которой производится описание физических процессов. Выбор системы координат является в то же время и выбором системы отсчета. Конечно, не всякий выбор системы координат изменяет систему отсчета. Любые преобразования в данной системе отсчета вида

$$x'^0 = f^0(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3);\qquad x'^\alpha = f^\alpha(x^1,\ x^2,\ x^3);\quad \alpha = 1,\ 2,\ 3 \tag{9.1}$$

всегда оставляют нас в этой системе отсчета. Всякий другой выбор системы координат обязательно приводит к изменению системы отсчета. Выбор систем координат производится из класса допустимых координат, в котором

$$g_{00} > 0,\quad g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta < 0. \tag{9.2}$$

Исходным пунктом лагранжева формализма является построение функции действия. Обычно выражение, определяющее функцию действия, записывают в виде

$$S=\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}\mathfrak{L}(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)\,dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3, \tag{9.3}$$

где интегрирование производится по некоторой произвольной четырехмерной области пространства-времени. Поскольку действие должно быть общековариантным, плотность функции Лагранжа является плотностью скаляра веса $+1$. Плотность скаляра веса $+1$ есть произведение скалярной функции на величину $\sqrt{-g}$. Выбор плотности лагранжиана осуществляется из ряда требований. К их числу относятся требования вещественности и ковариантности.

Вещественность плотности лагранжиана гарантирует вещественность динамических характеристик физического поля, таких, например, как энергия и импульс поля. Ковариантность плотности лагранжиана обеспечивает ковариантность уравнений поля. Таким образом, плотность лагранжиана теории является скалярной плотностью, построенной из изучаемых полей φ_A, метрического тензора и частных производных по координатам

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(\varphi_A,\ \partial_n\varphi_A,\ \ldots,\ g_{ik},\ \partial_n g_{ik}\ldots). \tag{9.4}$$

Для простоты предположим, что рассматриваемая нами система состоит из вещественных скалярного и векторного полей. Будем считать, что лагранжиан системы полей не содержит производных выше первого порядка. Это ограничение приводит к тому, что все наши уравнения поля будут уравнениями второго порядка:

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(\varphi,\ \partial_n\varphi,\ A_i,\ \partial_n A_i,\ g_{ik},\ \partial_n g_{ik},\ g^{ik},\ \partial_n g^{ik}). \tag{9.5}$$

Уравнения поля найдем из условия равенства нулю функциональной вариации от действия

$$\delta S=$$

$$=\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}d\Omega\,\delta\mathfrak{L}(\varphi,\ \partial_n\varphi,\ A_i,\ \partial_n A_i,\ g_{ik},\ \partial_n g_{ik},\ g^{ik},\ \partial_n g^{ik})=0. \tag{9.6}$$

Вариация $\delta\mathfrak{L}$ равна

$$\delta\mathfrak{L}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi}\,\delta\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\,\delta\partial_n\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_i}\,\delta A_i+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\,\delta\partial_n A_i \tag{9.7}$$

или

$$\delta\mathfrak{L}=\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}\,\delta\varphi+\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i}\,\delta A_i+\partial_n\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\,\delta\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\,\delta A_i\right]=0. \tag{9.8}$$

Здесь мы обозначили вариационную производную Эйлера через

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi}-\partial_n\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\right). \tag{9.9}$$

При получении выражения (9.8) мы учли, что

$$\delta\partial_n A_i=\partial_n\delta A_i. \tag{9.10}$$

Подставляя (9.8) в (9.6) и применяя теорему Гаусса, получим

$$\delta S=\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}d^4x\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}\,\delta\varphi+\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i}\,\delta A_i\right)+\frac{1}{c}\int ds_n\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\,\delta\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\,\delta A\right]=0.$$

Поскольку вариация полей на границе равняется нулю, имеем

$$\delta S=\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}d^4x\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}\,\delta\varphi+\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i}\,\delta A_i\right)=0. \tag{9.11}$$

В силу независимости и произвольности вариаций $\delta\varphi$ и δA_i, с помощью основной леммы вариационного исчисления получим уравнения для полей

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}=0;\qquad\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i}=0. \tag{9.12}$$

Кроме уравнений поля метод Лагранжа дает возможность получить и дифференциальные законы сохранения. Принято различать два типа дифференциальных законов сохранения: сильные и слабые.

Сильным законом сохранения называют дифференциальное соотношение, которое выполняется в силу инвариантности действия при преобразовании координат. Слабые законы сохранения получаются из сильных, если учесть в них уравнения поля (9.12).

Следует особо подчеркнуть, что дифференциальные законы сохранения в общем случае не утверждают сохранение чего-либо ни локально, ни глобально. Для нашего случая действие имеет вид

$$S=\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x\, \mathfrak{L}\,(\varphi,\ \partial_n\varphi,\ A_i,\ \partial_n A_i,\ g_{ik},\ \partial_n g_{ik},\ g^{ik},\ \partial_n g^{ik}). \tag{9.13}$$

Совершим бесконечно малое преобразование системы координат

$$x'^i=x^i+\delta x^i, \tag{9.14}$$

где δx^i — бесконечно малый 4-вектор.

Так как действие является скаляром, то при этом преобразовании оно останется неизменным, а следовательно,

$$\delta_c S=\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega'} d^4x'\ \mathfrak{L}'(x')-\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x\ \mathfrak{L}(x)=0, \tag{9.15}$$

где

$$\mathfrak{L}'(x')=\mathfrak{L}'(\varphi'(x'),\quad \partial'_n\varphi'(x'),\quad A'_i(x'),\quad \partial'_n A'_i(x),$$
$$g'_{ik}(x'),\quad \partial'_n g'_{ik}(x'),\quad g'^{ik}(x'),\quad \partial'_n g'^{ik}(x')).$$

Первый член в (9.15) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega'} d^4x'\,\mathfrak{L}'(x')=\int\limits_{\Omega} J\,d^4x\,\mathfrak{L}'(x'), \tag{9.16}$$

где якобиан J равен

$$J=\frac{\partial(x'^0,\ x'^1,\ x'^2,\ x'^3)}{\partial(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)}=\det\left\|\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\right\|. \tag{9.17}$$

При преобразовании (9.14) якобиан имеет вид

$$J=1+\partial_i\delta x^i. \tag{9.18}$$

Разлагая $\mathfrak{L}'(x')$ в ряд Тейлора, имеем

$$\mathfrak{L}'(x')=\mathfrak{L}'(x)+\delta x^i\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x^i}+\ldots \tag{9.19}$$

Учитывая (9.16), (9.18) и (9.19), перепишем вариацию (9.15) в виде

$$\delta_c S=\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x\left[\delta_L\mathfrak{L}(x)+\frac{\partial}{\partial x^i}(\delta x^i\,\mathfrak{L}(x))\right]. \tag{9.20}$$

Здесь мы обозначили

$$\delta_{\mathrm{L}}\mathfrak{L}(x) = \mathfrak{L}'(x) - \mathfrak{L}(x). \tag{9.21}$$

Эта вариация обычно называется вариацией Ли. Она перестановочна с частным дифференцированием

$$\delta_{\mathrm{L}}\partial_l = \partial_l\delta_{\mathrm{L}}. \tag{9.22}$$

Вариация Ли от плотности функции Лагранжа равна

$$\delta_{\mathrm{L}}\mathfrak{L} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi}\delta_{\mathrm{L}}\varphi + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\delta_{\mathrm{L}}\partial_n\varphi + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_i}\delta_{\mathrm{L}}A_i + \\ + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\delta_{\mathrm{L}}\partial_n A_i + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{ik}}\delta_{\mathrm{L}}g_{ik} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n g_{ik})}\delta_{\mathrm{L}}\partial_n g_{ik} + \\ + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\partial g^{lm}}\delta_{\mathrm{L}}g^{lm} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n g^{lm})}\delta_{\mathrm{L}}\partial_n g^{lm}. \tag{9.23}$$

Вариация Ли от контравариантных компонент g^{lm} является зависимой от вариации ковариантных компонент g_{lm}. Поскольку

$$g_{ik}g^{kl} = \delta_i^l,$$

то легко получить

$$\delta_{\mathrm{L}}g^{ml} = -g^{il}g^{km}\delta_{\mathrm{L}}g_{ik}. \tag{9.24}$$

Совершая элементарные преобразования, получим

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int_\Omega d^4x \left[\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}\delta_{\mathrm{L}}\varphi + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i}\delta_{\mathrm{L}}A_i + \right. \\ \left. + \left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g_{ik}} - g^{il}g^{km}\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g^{lm}}\right)\delta_{\mathrm{L}}g_{ik} + D_n J^n\right] \doteq 0, \tag{9.25}$$

где

$$J^n = \mathfrak{L}\,\delta x^n + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\delta_{\mathrm{L}}\varphi + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\delta_{\mathrm{L}}A_i + \\ + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n g_{ik})}\delta_{\mathrm{L}}g_{ik} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n g^{lm})}\delta_{\mathrm{L}}g^{lm}. \tag{9.26}$$

Так как J^n является 4-вектором веса $+1$, то

$$\partial_n J^n = D_n J^n, \tag{9.27}$$

где D_n — ковариантная производная в псевдоевклидовом пространстве-времени.

Следует отметить, что вариации Ли $\delta_{\mathrm{L}}\varphi$ и $\delta_{\mathrm{L}}A_i$, входящие в выражение (9.25), в отличие от функциональных вариаций, не являются независимыми друг от друга, поскольку они порождены преобразованием координат (9.14). Все они могут быть выражены через четыре компоненты вектора δx^m. Вариация метрического тензора $\delta_L g_{ik}$ также порождена преобразованием координат и также может быть выражена через 4-вектор δx^m. Поскольку преобразование координат никогда не может изменить характера геометрии, то все наше рассмотрение справедливо как для псевдоевклидовой геометрии, так и для римановой геометрии, однако для простоты мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь псевдоевклидовой геометрии.

Найдем вариацию Ли от полевых переменных, возникающую из-за преобразования координат. Согласно закону преобразования ковариантного вектора

$$A'_i(x') = A_k(x)\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \tag{9.28}$$

имеем

$$A'_i(x+\delta x) = A_i(x) - A_k(x)\frac{\partial \delta x^k}{\partial x^i},$$

откуда

$$\delta_L A_i(x) = -\delta x^k \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_k \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^i}, \tag{9.29}$$

или, в ковариантной форме,

$$\delta_L A_i(x) = -\delta x^k D_k A_i - A_k D_i \delta x^k. \tag{9.30}$$

Поскольку при преобразовании координат скалярная величина преобразуется по закону

$$\varphi'(x') = \varphi(x), \tag{9.31}$$

имеем

$$\delta_L \varphi = -\delta x^k D_k \varphi. \tag{9.32}$$

Найдем теперь вариацию Ли от метрического тензора g_{ik}. Из закона преобразования тензора

$$g'_{ik}(x') = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^k} g_{lm}(x)$$

получим

$$g'_{ik}(x+\delta x) = g_{ik} - g_{il}\,\partial_k \delta x^l - g_{kl}\,\partial_i \delta x^l, \tag{9.33}$$

откуда

$$\delta_L g_{ik} = -g_{il}\,\partial_k \delta x^l - g_{kl}\,\partial_i \delta x^l - \delta x^l\,\partial_l g_{ik}. \tag{9.34}$$

Учитывая равенство

$$\partial_l g_{ik} = g_{ks}\Gamma^s_{il} + g_{is}\Gamma^s_{kl}, \tag{9.35}$$

запишем выражение (9.34) в ковариантных производных

$$\delta_{\mathrm{L}} g_{ik} = -g_{il} D_k \delta x^l - g_{kl} D_i \delta x^l. \tag{9.36}$$

Подставляя выражения (9.30), (9.32) и (9.36) в действие (9.25), получим

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int_{\Omega} d^4x \left[-\delta x^l \left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \varphi} D_l \varphi + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_i} D_l A_i \right) - \right.$$
$$- \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_i} A_l D_i \delta x^l - (g_{il} D_k \delta x^l + g_{kl} D_i \delta x^l) \times$$
$$\left. \times \left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g_{ik}} - g^{ik} g^{km} \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g^{lm}} \right) + D_n J^n \right]. \tag{9.37}$$

Введем следующее обозначение:

$$T^{ik} = -2\left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g_{ik}} - g^{il} g^{km} \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g^{lm}} \right). \tag{9.38}$$

Мы увидим в дальнейшем, что эта величина, впервые введенная Гильбертом, является тензором энергии-импульса системы полей.

Интегрируя по частям в выражении (9.37), получим

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int_{\Omega} d^4x \left[-\delta x^l \left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \varphi} D_l \varphi + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_i} D_l A_i - \right.\right.$$
$$\left. - D_i \left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_i} A_l \right) + D_i (T^{ik} g_{lk}) \right) +$$
$$\left. + D_n \left(J^n - \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_n} A_l \delta x^l + T^{in} g_{il} \delta x^l \right) \right]. \tag{9.39}$$

Подставляя в выражение (9.26) для вектора J^n значения вариаций $\delta_{\mathrm{L}}\varphi$, $\delta_{\mathrm{L}} A_i$ и $\delta_{\mathrm{L}} g_{ik}$ согласно формулам (9.30), (9.32) и (9.36) и группируя члены при δx^l и $D_k \delta x^l$, имеем

$$J^n - \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_n} A_l \delta x^l = -\tau^n_l \delta x^l - \sigma^{nk}_l D_k \delta x^l. \tag{9.40}$$

Здесь мы обозначили

$$\tau^n_l = -\mathfrak{L}\delta^n_l + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n \varphi)} D_l \varphi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)} D_l A_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\delta A_n} A_l. \tag{9.41}$$

Эту величину обычно называют каноническим тензором энергии-импульса, а величину

$$\sigma_l^{nk} = 2\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n g_{ik})} g_{il} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_k)} A_l - 2\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n g^{lm})} g^{km} \qquad (9.42)$$

— тензором спина.

На основании (9.40) ковариантную дивергенцию в (9.39) представим в виде

$$D_n\left(J^n - \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_n} A_l \delta x^l + T_l^n \delta x^l\right) = \delta x^l \left[D_n T_l^n - D_n \tau_l^n\right] + \\ + D_n \delta x^l \left[T_l^n - \tau_k^n - D_k \sigma_l^{kn}\right] - \sigma_l^{nk} D_n D_k \delta x^l. \qquad (9.43)$$

Используя это выражение, вариацию действия (9.39) можно записать в виде

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int_\Omega d^4x\left[-\delta x^l\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi} D_l\varphi + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i} D_l A_i - \right.\right. \\ \left. - D_i\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i} A_l\right) + D_i \tau_l^i\right) + D_n \delta x^l \left[T_l^n - \tau_l^n - D_k \sigma_l^{kn}\right] - \\ \left. - \sigma_l^{nk} D_n D_k \delta x^l\right] = 0. \qquad (9.44)$$

Так как объем интегрирования произволен, то отсюда следует, что подынтегральная функция всюду равна нулю:

$$-\delta x^l\left[\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi} D_l\varphi + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i} D_l A_i - D_i\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i} A_l\right) + D_i \tau_l^i\right] + \\ + \left[T_l^n - \tau_l^n - D_k \sigma_l^{kn}\right] D_n \delta x^l - \sigma_l^{nk} D_n D_k \delta x^l = 0. \qquad (9.45)$$

Это выражение обращается в нуль для произвольных значений δx^l, независимо от выбора системы координат. В силу тензорного закона преобразования, если оно обращается в нуль в одной системе координат, то оно равно нулю в любой другой системе координат. Отсюда следуют тождества

$$\begin{gathered} D_i \tau_l^i + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi} D_l\varphi + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i} D_l A_i + D_i\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i} A_l\right) = 0; \\ T_l^n - \tau_l^n - D_k \sigma_l^{kn} = 0. \end{gathered} \qquad (9.46)$$

Что касается последнего члена в (9.45), то он должен обращаться в нуль в силу антисимметрии величины σ_l^{nk} по верхним индексам. Из антисимметрии тензора спина следует

$$D_l T^l_n = D_l \tau^l_n. \tag{9.47}$$

Используя (9.47), первое тождество (9.46) можно записать в виде

$$D_l T^l_l + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \varphi} D_l \varphi + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_l} D_l A_l - D_l \left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_l} A_l \right) = 0. \tag{9.48}$$

Тождества (9.46) называются сильными законами сохранения, они выполняются в силу инвариантности действия при преобразовании координат.

Если мы учтем уравнения поля (9.12), то получим слабые законы сохранения

$$D_k T^k_l = 0; \quad T^k_l - \tau^k_l = D_p \sigma^{pk}_l, \tag{9.49}$$

где величина τ^k_l согласно уравнениям поля и (9.41) равна

$$\tau^k_l = -\mathfrak{L}\delta^k_l + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_n \varphi)} D_l \varphi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_k A_i)} D_l A_i. \tag{9.50}$$

Канонический тензор энергии-импульса в общем случае несимметричен по своим индексам. Наличие слабого закона сохранения симметрического тензора энергии-импульса обеспечивает сохранение тензора момента импульса поля.

Определяя тензор момента импульса

$$M^{ikn} = x^k T^{in} - x^i T^{kn}, \tag{9.51}$$

легко установить с помощью (9.49) и определения (9.38), что

$$D_n M^{ikn} = 0. \tag{9.52}$$

Полученные нами слабые законы сохранения для тензора энергии-импульса и тензора момента импульса еще не свидетельствуют о сохранении энергии-импульса или момента количества движения для замкнутой системы физических полей. Существование интегральных законов сохранения для замкнутой системы связано со свойствами пространства-времени, а именно с существованием определенной группы движения пространства (метрики). Без наличия определенной группы движения пространства не могут существовать интегральные законы сохранения энергии-импульса и момента импульса. Эти вопросы подробно рассмотрены в главе II.

Канонический тензор энергии-импульса особенно просто вычисляется, если использовать координаты, в которых метрический тензор диагонален (1, —1, —1, —1). В этом случае плотность лагранжиана имеет вид

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(\varphi(x),\ \partial_n\varphi(x),\ A_i(x),\ \partial_n A_i(x)). \tag{9.53}$$

Плотность лагранжиана не зависит явно от x, а зависит от координат через полевые переменные, поэтому имеем

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x^l}=\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}\partial_l\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\partial_l\partial_n\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_i}\partial_l A_i+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\partial_l\partial_n A_i. \tag{9.54}$$

Отсюда дифференцированием по частям получим

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x^l}=\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}\partial_l\varphi+\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i}\partial_l A_i+\partial_n\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\partial_l\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\partial_l A_i\right]. \tag{9.55}$$

Применяя в этом тождестве уравнения поля (9.12), найдем

$$\partial_n\left[-\mathfrak{L}\delta_l^n+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\partial_l\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\partial_l A_i\right]=0. \tag{9.56}$$

Под знаком дифференцирования мы имеем канонический тензор энергии-импульса, записанный в галилеевых координатах

$$\tau_l^n=-\mathfrak{L}\delta_l^n+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\partial_l\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\partial_l A_i. \tag{9.57}$$

В силу принципа стационарного действия уравнения поля не изменятся, если вместо плотности лагранжиана $\mathfrak{L}$ взять плотность лагранжиана $\mathfrak{L}'$:

$$\mathfrak{L}'=\mathfrak{L}+D_k f^k. \tag{9.58}$$

Поскольку мы рассматриваем лишь лагранжиан, содержащий производные от полей не выше первого порядка, то плотность вектора f^k должна быть построена из полей φ, A_i и метрических коэффициентов g_{ik}, g^{lm}. Нетрудно увидеть, что

$$\frac{\delta}{\delta\varphi}D_k f^k=0;\quad \frac{\delta}{\delta A_i}D_k f^k=0,$$

если воспользоваться выражением

$$D_k f^k = \partial_k f^k = \frac{\partial f^l}{\partial g_{ik}} \partial_l g_{ik} + \frac{\partial f^k}{\partial \varphi} \partial_k \varphi + \frac{\partial f^k}{\partial A_i} \partial_k A_i + \frac{\partial f^k}{\partial g^{lm}} \partial_k g^{lm}. \quad (9.59)$$

Выясним теперь, как изменяется канонический тензор энергии-импульса при таком изменении плотности лагранжиана:

$$\tau'^k_l = -\mathfrak{L}'\delta^k_l + \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial(\partial_k A_i)} D_l A_i + \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial(\partial_k \varphi)} D_l \varphi. \quad (9.60)$$

На основании (9.58) и (9.59) имеем

$$\frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial(\partial_k \varphi)} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_k \varphi)} + \frac{\partial}{\partial(\partial_k \varphi)} D_p f^p = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_k \varphi)} + \frac{\partial f^k}{\partial \varphi}. \quad (9.61)$$

На основании равенств (9.61) и (9.57) получим

$$\tau'^k_l = \tau^k_l + \left[\frac{\partial f^k}{\partial A_i} D_l A_i + \frac{\partial f^k}{\partial \varphi} D_l \varphi - \delta^k_l D_m f^m \right]. \quad (9.62)$$

Так как

$$D_l f^k = \frac{\partial f^k}{\partial A_i} D_l A_i + \frac{\partial f^k}{\partial \varphi} D_l \varphi, \quad (9.63)$$

найдем

$$\tau'^k_l = \tau^k_l + D_m h^{mk}_l, \quad (9.64)$$

где $h^{mk}_l = -h^{km}_l$ — антисимметричный тензор третьего ранга

$$h^{mk}_l = \delta^m_l f^k - \delta^k_l f^m. \quad (9.65)$$

Таким образом, добавление к плотности лагранжиана ковариантной дивергенции изменяет канонический тензор энергии-импульса на дивергенцию от антисимметричного тензора третьего ранга.

Рассмотрим теперь, как при этом изменится симметрический тензор энергии-импульса, определенный по Гильберту:

$$T^{ik} = -2\left[\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g_{ik}} - g^{im} g^{kl} \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g^{ml}} \right]. \quad (9.66)$$

Добавление к плотности лагранжиана ковариантной дивергенции приведет к добавлению тензора вида

$$\Delta^{pq} = \frac{\delta}{\delta g_{pq}} D_k f^k - g^{pm} g^{ql} \frac{\delta}{\delta g^{ml}} D_k f^k. \quad (9.67)$$

С помощью (9.59) получим, например,

$$\frac{\partial}{\partial g_{qp}} D_k f^k = \frac{\partial^2 f^l}{\partial g_{pq} \partial g_{ik}} \partial_l g_{ik} + \frac{\partial^2 f^l}{\partial g_{pq} \partial \varphi} \partial_l \varphi + \\ + \frac{\partial^2 f^l}{\partial g_{pq}\, \partial A_i} \partial_l A_i + \frac{\partial^2 f^k}{\partial g_{pq}\, \partial g^{ml}} \partial_k g^{ml}. \quad (9.68)$$

На основании (9.59) имеем также

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_m g_{pq})} D_n f^n = \frac{\partial f^m}{\partial g_{pq}}. \quad (9.69)$$

Используя это выражение, найдем

$$\partial_m \left(\frac{\partial}{\partial(\partial_m g_{pq})} D_n f^n \right) = \frac{\partial^2 f^m}{\partial g_{pq}\, \partial g_{ik}} \partial_m g_{ik} + \\ + \frac{\partial^2 f^m}{\partial g_{pq}\, \partial \varphi} \partial_m \varphi + \frac{\partial^2 f^m}{\partial g_{pq}\, \partial A_i} \partial_m A_i + \frac{\partial^2 f^m}{\partial g_{pq}\, \partial g^{ik}} \partial_m g^{ik}.$$

Сравнивая это выражение с (9.68), мы видим

$$\frac{\delta}{\delta g_{pq}} (D_n f^n) = \frac{\partial}{\partial g_{pq}} (D_n f^n) - \partial_m \left(\frac{\partial}{\partial(\partial_m g_{pq})} D_n f^n \right) = 0. \quad (9.70)$$

Аналогично можно показать, что

$$\frac{\delta}{\delta g^{ml}} (D_k f^k) = 0. \quad (9.71)$$

Таким образом, добавление к плотности лагранжиана ковариантной дивергенции не изменяет симметрического тензора энергии-импульса. Симметрический тензор энергии-импульса отличается от канонического на дивергенцию от тензора спина:

$$T_i^k - \tau_i^k = D_l \sigma_i^{lk}. \quad (9.72)$$

При изменении плотности лагранжиана на дивергенцию от плотности вектора дивергенция тензора спина также изменится, но сумма канонического тензора и дивергенции тензора спина останется неизменной. Это можно проверить и прямым вычислением.

Найдем теперь выражение для симметрического тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Как известно, плотность лагранжиана для этого поля имеет вид

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{16\pi} \sqrt{-g}\, F_{lm} F^{lm}. \quad (9.73)$$

Запишем ее через переменные F_{ik} и метрические коэффициенты:

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\,F_{ml}F_{pq}g^{pm}g^{ql}. \tag{9.74}$$

Мы видим, что плотность лагранжиана зависит от ковариантных компонент g_{ik}, которые входят в детерминант g, а также контравариантных компонент, которые входят в виде двух множителей. Так как

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{ik}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{ik}, \tag{9.75}$$

то

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{ik}} = -\frac{1}{32\pi}\sqrt{-g}\,g^{ik}F_{lm}F^{lm}. \tag{9.76}$$

Аналогично

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{st}} = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\,F_{ml}F_{pq}\left[\frac{\partial g^{pm}}{\partial g^{st}}g^{lq} + g^{pm}\frac{\partial g^{lg}}{\partial g^{st}}\right].$$

Поскольку

$$\frac{\partial g^{pm}}{\partial g^{st}} = \frac{1}{2}\left(\delta_s^p\delta_t^m + \delta_t^p\delta_s^m\right),$$

то, используя свойства антисимметрии тензора $F_{lm} = -F_{ml}$, получим

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{st}} = -\frac{1}{8\pi}\sqrt{-g}\,F_{sq}F_{tl}g^{lq}. \tag{9.77}$$

Так как в плотность лагранжиана электромагнитного поля не входят производные от метрического тензора, то плотность симметрического тензора энергии-импульса будет равна

$$T^{ik} = -2\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{ik}} - g^{is}g^{kt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{st}}\right].$$

Подставляя в эту формулу выражения (9.76) и (9.77), найдем

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{-g}\left[-F^{im}F^{kl}g_{ml} + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right]. \tag{9.78}$$

Разделив это выражение на $\sqrt{-g}$, получим тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$t^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[-F^{im}F^{kl}g_{ml} + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right]. \tag{9.79}$$

Найдем теперь канонический тензор энергии-импульса

$$\tau_k^i = -\delta_k^i \mathfrak{L} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_i A_p)} \partial_k A_p. \qquad (9.80)$$

Подставляя в это выражение лагранжиан поля, получим

$$\tau_k^i = \frac{1}{4\pi} \left[-F^{ip} \partial_k A_p + \frac{1}{4} \delta_k^i F_{lm} F^{lm} \right]. \qquad (9.81)$$

Легко убедиться, что

$$\tau^{ik} \neq \tau^{ki}. \qquad (9.82)$$

Для тензора спина электромагнитного поля имеем

$$\sigma_k^{pi} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_p A_i)} A_k = -\frac{1}{4\pi} F^{pi} A_k. \qquad (9.83)$$

Добавляя дивергенцию спина к каноническому тензору, получим симметрический тензор энергии-импульса электромагнитного поля (Гильберта)

$$t_k^i = \tau_k^i + \partial_p \sigma_k^{pi} = \frac{1}{4\pi} \left[-F^{ip} F_{kp} + \frac{1}{4} \delta_k^i F_{lm} F^{lm} \right] \qquad (9.84)$$

или, умножая обе части равенства на g^{kn}, имеем

$$t^{in} = \frac{1}{4\pi} \left[-F^{ip} F^{nl} g_{pl} + \frac{1}{4} g^{in} F_{lm} F^{lm} \right], \qquad (9.85)$$

что совпадает с (9.78).

В заключение построим тензор энергии-импульса вещества. Как известно из § 8, плотность сохраняющейся массы равна

$$\mu = \frac{dm}{dV} = \sqrt{-g}\, \mu_0 u^0 \frac{1}{c}. \qquad (9.86)$$

Так как величина $\frac{dm}{dV}$ не зависит от метрического тензора, а четырехмерная скорость u^i равна

$$u^i = \frac{cv^i}{\sqrt{g_{lk} v^l v^k}}; \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}, \qquad (9.87)$$

то вариация выражения (9.86) по метрическому тензору будет равна нулю:

$$\delta_g \mu = u^0 \delta_g (\sqrt{-g}\, \mu_0) - \sqrt{-g}\, \mu_0 \frac{c^2 v^i v^k \delta g_{ik}}{2 (g_{mn} v^m v^n)^{3/2}} = 0. \qquad (9.88)$$

Отсюда имеем

$$\delta_g(\sqrt{-g}\,\mu_0)=\sqrt{-g}\,\mu_0\frac{u^i u^k}{2c^2}\,\delta g_{ik}. \tag{9.89}$$

Поскольку плотность лагранжиана действия вещества имеет вид

$$\mathfrak{L}=-\sqrt{-g}\,\mu_0 c^2,$$

то плотность тензора энергии-импульса вещества будет равна

$$t_{\text{c}}^{ik}=-2\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{ik}}=\sqrt{-g}\,\mu_0 u^i u^k. \tag{9.90}$$

Учитывая это выражение, а также формулу (9.85), суммарный тензор энергии-импульса вещества и электромагнитного поля принимает вид

$$t^{ik}=\mu_0 u^i u^k+\frac{1}{4\pi}\left[-F^{ip}F^{kl}g_{pl}+\frac{1}{4}\,g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right]. \tag{9.91}$$

§ 10. Тензор энергии-импульса Белинфанте

В § 9 мы построили тензор энергии-импульса Гильберта с помощью произвольных бесконечно малых смещений δx^l в произвольной криволинейной системе координат. Этот путь построения тензора энергии-импульса является общим, однако он несколько сложен. Задача построения тензора энергии-импульса может быть упрощена, если ограничиться смещениями δx_i, удовлетворяющими уравнению Киллинга

$$\delta_L g_{ik}=-D_k\delta x_i-D_i\delta x_k=0.$$

Поскольку пространство-время псевдоевклидово, то это всегда можно сделать. Более того, мы всегда можем построить все 10 независимых векторов Киллинга и с их помощью найти интегральные законы сохранения. Законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения замкнутой системы есть прямое следствие существования 10 векторов Киллинга. При этих смещениях в силу равенств (9.25) и (9.26) имеем

$$\delta_c S=\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}d^4x\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}\,\delta_L\varphi+\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i}\,\delta_L A_i+D_n J^n\right); \tag{10.1}$$

$$J^n=\mathfrak{L}\delta x^n+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\,\delta_L\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\,\delta_L A_i. \tag{10.2}$$