Отсюда имеем

$$\delta_g(\sqrt{-g}\,\mu_0)=\sqrt{-g}\,\mu_0\frac{u^iu^k}{2c^2}\,\delta g_{ik}. \qquad (9.89)$$

Поскольку плотность лагранжиана действия вещества имеет вид

$$\mathfrak{L}=-\sqrt{-g}\,\mu_0 c^2,$$

то плотность тензора энергии-импульса вещества будет равна

$$t_{\text{c}}^{ik}=-2\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{ik}}=\sqrt{-g}\,\mu_0 u^iu^k. \qquad (9.90)$$

Учитывая это выражение, а также формулу (9.85), суммарный тензор энергии-импульса вещества и электромагнитного поля принимает вид

$$t^{ik}=\mu_0u^iu^k+\frac{1}{4\pi}\left[-F^{ip}F^{kl}g_{pl}+\frac{1}{4}\,g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right]. \qquad (9.91)$$

§ 10. Тензор энергии-импульса Белинфанте

В § 9 мы построили тензор энергии-импульса Гильберта с помощью произвольных бесконечно малых смещений δx^l в произвольной криволинейной системе координат. Этот путь построения тензора энергии-импульса является общим, однако он несколько сложен. Задача построения тензора энергии-импульса может быть упрощена, если ограничиться смещениями δx_i, удовлетворяющими уравнению Киллинга

$$\delta_L g_{ik}=-D_k\delta x_i-D_i\delta x_k=0.$$

Поскольку пространство-время псевдоевклидово, то это всегда можно сделать. Более того, мы всегда можем построить все 10 независимых векторов Киллинга и с их помощью найти интегральные законы сохранения. Законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения замкнутой системы есть прямое следствие существования 10 векторов Киллинга. При этих смещениях в силу равенств (9.25) и (9.26) имеем

$$\delta_c S=\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}d^4x\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}\,\delta_L\varphi+\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i}\,\delta_L A_i+D_nJ^n\right); \qquad (10.1)$$

$$J^n=\mathfrak{L}\delta x^n+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\,\delta_L\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\,\delta_L A_i. \qquad (10.2)$$

Если поля φ и A_l удовлетворяют полевым уравнениям (9.12), найдем

$$\delta_c S = \frac{1}{c} \int\limits_{\Omega} d^4x \, (D_n J^n) = 0, \tag{10.3}$$

откуда в силу произвольности объема интегрирования получим

$$D_n J^n = 0. \tag{10.4}$$

Подставляя в соотношение (10.2) выражения (9.30) и (9.32) для вариаций Ли $\delta_L A_i$, $\delta_L \varphi$, найдем

$$J^n = -\delta x^l \tau_l^n - \tilde{\sigma}_l^{nk} D_k \delta x^l, \tag{10.5}$$

где канонический тензор энергии-импульса имеет вид

$$\tau_l^n = -\mathfrak{L}\delta_l^n + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_n \varphi)} D_l \varphi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_n A_i)} D_l A_i, \tag{10.6}$$

а тензор спина равен

$$\tilde{\sigma}_l^{nk} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_n A_k)} A_l. \tag{10.7}$$

Подставляя выражение для тока (10.5) в (10.4), имеем

$$D_n J^n = -\delta x_l D_n \tau^{nl} - [\tau^{nl} + D_k \tilde{\sigma}^{l;\,kn}] D_n \delta x_l - \\ - \tilde{\sigma}^{l;\,nk} D_n D_k \delta x_l = 0. \tag{10.8}$$

В силу уравнений Киллинга имеем

$$D_n D_k \delta x_l = 0. \tag{10.9}$$

В галилеевой системе координат (10.8) имеет наиболее простой вид

$$-\delta x_l \partial_n \tau^{nl} - [\tau^{nl} + \partial_k \tilde{\sigma}^{l;\,kn}] \partial_n \delta x_l = 0. \tag{10.10}$$

В галилеевой системе координат уравнения Киллинга

$$\partial_k \delta x_i + \partial_i \delta x_k = 0 \tag{10.11}$$

имеют общее решение в виде линейной функции от x^l

$$\delta x_i = \varepsilon_i + \omega_{il} x^l, \tag{10.12}$$

где ε_i — постоянный вектор, а ω_{il} — антисимметричная матрица 4-го порядка

$$\omega_{il} + \omega_{li} = 0. \tag{10.13}$$

Подставляя в (10.10) смещение вида

$$\delta x_l = \varepsilon_l, \tag{10.14}$$

найдем

$$\partial_n \tau^{nl} = 0. \tag{10.15}$$

Аналогично для смещений типа

$$\delta x_l = w_{lm} x^m \tag{10.16}$$

имеем

$$(\tau^{nl} + \partial_k \tilde{\sigma}^{l;\,kn}) w_{ln} = 0. \tag{10.17}$$

В силу антисимметрии и произвольности тензора w_{ln} отсюда находим, что величина

$$\tau^{nl} + \partial_k \tilde{\sigma}^{l;\,kn} \tag{10.18}$$

симметрична по индексам n и l. Следовательно,

$$\tau^{nl} - \tau^{ln} = -\partial_k (\tilde{\sigma}^{l;\,kn} - \tilde{\sigma}^{n;\,kl}). \tag{10.19}$$

Введем обозначение

$$H^{nlk} = \tilde{\sigma}^{l;\,kn} - \tilde{\sigma}^{n;\,kl} = -H^{lnk}. \tag{10.20}$$

Определим величину, антисимметричную по индексам k и n:

$$\sigma^{l;\,kn} = \frac{1}{2} (H^{nlk} + H^{nkl} - H^{kln}). \tag{10.21}$$

Тогда, следуя Белинфанте, определим

$$T^{nl} = \tau^{nl} + \frac{1}{2} \partial_k (H^{nlk} + H^{nkl} - H^{kln}). \tag{10.22}$$

Подставляя выражение (10.7) для тензора спина в определение (10.20), найдем

$$H^{nlk} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_k A_n)} A^l - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_k A_l)} A^n. \tag{10.23}$$

Нетрудно убедиться, что в силу равенств (10.19) и (10.20) тензор энергии-импульса удовлетворяет закону сохранения

$$\partial_n T^{nl} = 0; \quad \partial_l T^{nl} = 0 \tag{10.24}$$

и является симметричным.

Покажем теперь, что тензор Белинфанте есть не что иное, как тензор энергии-импульса Гильберта. Тензор Гильберта можно находить либо путем вычисления эйлеровской вариации по метрическим коэффициентам (для этой цели необходимо записать плотность лагранжиана в криволинейной системе координат), либо используя выражение для канонического тензора энергии-импульса и тензора спина по формуле (9.49). Второй путь построения можно осуществить, оставаясь в галилеевой системе координат. Метод Белинфанте, как мы увидим, и есть построение тензора Гильберта таким способом. Действительно, ранее в (9.47) и (9.49) мы получили слабые законы сохранения, которые, если поднять индексы у тензоров и перейти к галилеевой системе координат, можно записать в виде

$$\partial_k T^{kl} = 0; \quad T^{kl} - \tau^{kl} = \partial_p \sigma^{l;\,pk}; \quad \partial_k \tau^{kl} = 0. \tag{10.25}$$

Тензор энергии-импульса Гильберта T^{kl} симметричен по определению (9.38). В силу второго равенства величина

$$\tau^{kl} + \partial_p \sigma^{l;\,pk} = T^{kl} \tag{10.26}$$

также симметрична, а, следовательно,

$$\tau^{kl} - \tau^{lk} = -\partial_p (\sigma^{l;\,pk} - \sigma^{k;\,pl}). \tag{10.27}$$

Обозначая

$$H^{klp} = \sigma^{l;\,pk} - \sigma^{k;\,pl}, \tag{10.28}$$

найдем отсюда

$$\sigma^{l;\,pk} = \frac{1}{2} (H^{klp} + H^{kpl} - H^{plk}). \tag{10.29}$$

Подставляя это выражение в (10.26), представим тензор Гильберта в форме Белинфанте

$$T^{kl} = \tau^{kl} + \frac{1}{2} \partial_p [H^{klp} + H^{kpl} - H^{plk}]. \tag{10.30}$$

В галилеевой системе координат выражение (9.41) для канонического тензора энергии-импульса имеет вид

$$\tau_l^k = -\mathfrak{L}\delta_l^k + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_k \varphi)} \partial_l \varphi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_k A_i)} \partial_l A_i. \tag{10.31}$$

Сравнивая (10.22) с (10.30) и принимая во внимание выражения (10.31) и (10.23), мы видим, что тензор Белинфанте есть не что иное, как тензор Гильберта в галилеевой системе координат.

Вернемся теперь опять к рассмотрению основ теории относительности. К сожалению, по этим вопросам в литературе имеется много путаницы и неверных утверждений. Внести ясность в эти вопросы и в то же время расширить область применения специальной теории относительности и является нашей главной задачей. Эти вопросы нами частично затрагивались ранее.

§ 11. Координатная скорость света

Найдем теперь координатную скорость света. Как известно, движение светового сигнала описывается изотропным интервалом:

$$ds^2 = 0.$$

Вводя обозначение

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}$$

для координатной скорости света и учитывая, что подъем и опускание тензорных индексов у этой скорости производится с помощью тензора $\varkappa_{\alpha\beta}$ (4.14):

$$v_\alpha = \varkappa_{\alpha\beta} v^\beta; \quad v^2 = \varkappa_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta,$$

интервал (4.11) для этого случая представим в виде

$$c^2\left[\sqrt{g_{00}} + \frac{g_{0\alpha} v^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}\right]^2 - v^2 = 0. \qquad (11.1)$$

Записывая вектор скорости v^α в виде

$$v^\alpha = v e^\alpha, \qquad (11.2)$$

где e^α — единичный вектор в направлении скорости v^α,

$$\varkappa_{\alpha\beta} e^\alpha e^\beta = 1, \qquad (11.3)$$

из соотношения (5.1) получим

$$v = c\left[\sqrt{g_{00}} + \frac{g_{0\alpha} e^\alpha}{\sqrt{g_{00}}} \frac{v}{c}\right].$$

Разрешая это уравнение относительно v, имеем

$$v = \frac{c\sqrt{g_{00}}}{1 - \frac{g_{0\alpha} e^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}}. \qquad (11.4)$$