будет всегда положительно определенной, а поэтому детерминанты

$$\Delta_1 = \varkappa_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} \\ \varkappa_{12} & \varkappa_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} & \varkappa_{13} \\ \varkappa_{12} & \varkappa_{22} & \varkappa_{23} \\ \varkappa_{13} & \varkappa_{23} & \varkappa_{33} \end{vmatrix}$$

также будут всегда положительными: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$. Это дает нам возможность провести следующее преобразование:

$$dx'^1 = \frac{\varkappa^1_\alpha \, dx^\alpha}{\sqrt{\Delta_1}};$$
$$dx'^2 = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} dx^2 + \frac{(\varkappa_{23}\varkappa_{11} - \varkappa_{12}\varkappa_{13})}{\sqrt{\Delta_2 \Delta_1}} dx^3;$$
$$dx'^3 = \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_2}} dx^3,$$

где dx'^α в римановом пространстве не являются полными дифференциалами. Данное преобразование приводит квадратичную форму (11.9) к диагональному виду:

$$dl^2 = \varkappa_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \, dx^\beta = (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2.$$

Таким образом, встав на точку зрения, что единое пространство-время обладает псевдоевклидовой геометрией, и рассмотрев с этой точки зрения системы координат, мы смогли по-новому взглянуть уже и на принцип относительности, а главное, существенно расширить область применения специальной теории относительности.

§ 12. Обобщенные инерциальные системы отсчета

Рассмотрим теперь произвольное линейное преобразование от галилеевых координат (X, Y, Z, T) к некоторым координатам (x, y, z, t):

$$\begin{aligned} T &= a_0 t + a_1 x + a_2 y + a_3 z; \\ X &= a_4 t + a_5 x + a_6 y + a_7 z; \\ Y &= a_8 t + a_9 x + a_{10} y + a_{11} z; \\ Z &= a_{12} t + a_{13} x + a_{14} y + a_{15} z. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Не ограничивая общности, потребуем, чтобы пространственные оси новой системы (x, y, z) были ортогональны друг другу. Тогда, с точностью до поворота пространственных систем координат, преобразование (12.1) будет эквивалентно преобразованию

$$\begin{aligned} T &= qx + pt; & X &= ax + bt; \\ Y &= y; & Z &= z, \end{aligned} \tag{12.2}$$

где a, b, p, q — некоторые постоянные.

Взяв дифференциалы от правых и левых частей этих равенств и подставив в выражение для интервала (2.13), получим

$$ds^2 = c^2 g_{00}\, dt^2 + 2cg_{01}\, dt\, dx + g_{11}\, dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{12.3}$$

где

$$\begin{aligned} g_{00} &= p^2 - \frac{b^2}{c^2}; & g_{01} &= c\left(pq - \frac{ab}{c^2}\right); \\ g_{11} &= c^2q^2 - a^2; & g_{22} &= g_{33} = -1. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Для того чтобы преобразование (12.2) было допустимым, мы должны обеспечить выполнение следующих условий:

$$p^2 - \frac{b^2}{c^2} > 0; \quad c^2q^2 - a^2 < 0. \tag{12.5}$$

Метрика (12.3) описывает произвольную инерциальную систему с координатами, несколько отличными от галилеевых координат.

Определим теперь координатную скорость световой волны. Для световой волны интервал равен нулю.

Вводя обозначения

$$v^x = \frac{dx}{dt}; \quad v^y = \frac{dy}{dt}; \quad v^z = \frac{dz}{dt}$$

для компонент координатной скорости светового сигнала, выражение (12.3) запишем в виде

$$g_{11}(v^x)^2 + 2cg_{01}v^x + c^2g_{00} - (v^y)^2 - (v^z)^2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно v^x, получим

$$v^x = c\left[\frac{-g_{01} \pm \sqrt{g_{01}^2 - g_{11}\left[g_{00} - \dfrac{(v^y)^2 + (v^z)^2}{c^2}\right]}}{g_{11}}\right].$$

Таким образом, имеем два значения корня: одно положительное, другое отрицательное. Если световой сигнал распространяется вдоль оси x, то это выражение упрощается:

$$c_1 = c\frac{-g_{01} - \sqrt{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}}{g_{11}} > 0;$$
$$c_2 = c\frac{-g_{01} + \sqrt{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}}{g_{11}} < 0, \qquad (12.6)$$

где c_1 — координатная скорость света в положительном направлении оси x; c_2 — координатная скорость света в противоположном направлении.

Величина координатной скорости света, как мы видели, определяется выражением (11.4), а единичный вектор e^α удовлетворяет соотношению (11.3). В рассматриваемом нами случае входящие в эти выражения компоненты метрического тензора равны

$$g_{02} = 0; \quad g_{03} = 0; \quad \varkappa_{11} = -g_{11} + \frac{g_{01}^2}{g_{00}} > 0;$$
$$g_{01} \neq 0; \quad g_{00} > 0; \quad \varkappa_{22} = 1; \quad \varkappa_{33} = 1; \quad \varkappa_{\alpha\beta} = 0; \quad \alpha \neq \beta.$$

Подставляя эти соотношения в равенство (11.3), получим

$$\varkappa_{11}(e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 = 1.$$

Поэтому единичный вектор e^α в направлении скорости света будет иметь компоненты

$$e^1 = \frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{\varkappa_{11}}}; \quad e^2 = \sin\theta\sin\varphi; \quad e^3 = \cos\theta. \qquad (12.7)$$

Теперь из выражения (11.4) мы можем определить величину координатной скорости света:

$$v = \frac{c\sqrt{g_{00}}}{1 - \dfrac{g_{01}}{\sqrt{g_{00}\varkappa_{11}}}\sin\theta\cos\varphi}. \qquad (12.8)$$

Поскольку величина $g_{01}/\sqrt{g_{00}\varkappa_{11}}$ всегда меньше единицы, то в пространстве скоростей выражение (12.8) описывает эллипсоид вращения (см. рис. 2). Сечение этого эллипсоида плоскостью xy ($\theta = \pi/2$) имеет вид эллипса

$$v = \frac{c\sqrt{g_{00}}}{1 - \dfrac{g_{01}}{\sqrt{g_{00}\varkappa_{11}}}\cos\varphi}$$

с эксцентриситетом $e=g_{01}/\sqrt{g_{00}\varkappa_{11}}<1$ и параметром $p=c\sqrt{g_{00}}$, а сечение плоскостью yz $(\varphi=\pi/2)$ является окружностью радиуса $v=c\sqrt{g_{00}}$.

Таким образом, величина координатной скорости света в каком-либо направлении определяется метрикой пространства-времени.

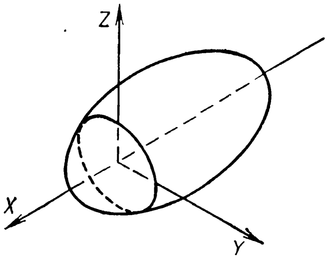

Рис. 2. Эллипсоид координатной скорости света

В общем случае инерциальной системы координат

$$c_1 \neq -c_2$$

скорость света в положительном направлении оси x не равна скорости света в противоположном направлении.

Из равенств (12.6) мы можем найти, что

$$c_1+c_2=-2c\,\frac{g_{01}}{g_{11}}; \quad c_1c_2=c^2\,\frac{g_{00}}{g_{11}}.$$

Отсюда следует, что

$$g_{11}=\frac{c^2}{c_1c_2}\,g_{00}; \;\; 2g_{01}=-cg_{00}\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right). \tag{12.9}$$

Поэтому в силу выражений (12.7)—(12.9) компоненты координатной скорости света $v^\alpha=ve^\alpha$ мы можем записать в виде

$$\begin{aligned} v^1 &= \frac{2c_1c_2\sin\theta\cos\varphi}{c_2-c_1+(c_2+c_1)\sin\theta\cos\varphi}; \\ v^2 &= \frac{c\sqrt{g_{00}}\sin\theta\sin\varphi}{1+\dfrac{c_2+c_1}{c_2-c_1}\sin\theta\cos\varphi}; \\ v^3 &= \frac{c\sqrt{g_{00}}\cos\theta}{1+\dfrac{c_2+c_1}{c_2-c_1}\sin\theta\cos\varphi}. \end{aligned} \tag{12.10}$$

Из выражений (12.10) можно убедиться, что значения координатной скорости света в прямом $(\theta=\theta_0,\ \varphi=\varphi_0)$ и противоположном $(\theta=\pi-\theta_0,\ \varphi=\varphi_0+\pi)$ направлениях в общем случае не равны. В частности, при $\theta_0=\pi/2$, $\varphi_0=0$ в прямом направлении имеем $v^1=c_1$, а в противоположном $v^1=c_2$.

Используя соотношения (12.9) между различными компонентами метрического тензора, выражение (12.3) для интервала мы можем записать в виде

$$ds^2=c^2g_{00}\left[dt^2-\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)dx\,dt+\frac{dx^2}{c_1c_2}\right]-dy^2-dz^2. \quad (12.11)$$

Интервал (12.11) описывает достаточно произвольную инерциальную систему, в которой координатные скорости света в противоположных направлениях в общем случае не равны. В случае равенства $c_1=-c_2=c$ интервал (12.11) принимает галилеев вид (2.13).

Таким образом, в произвольной инерциальной системе отсчета постулат Эйнштейна о постоянстве скорости света (в его формулировке) не выполняется, но тем не менее это обстоятельство никоим образом не сказывается на возможности описания физической реальности в этих системах отсчета. Конечно, зная псевдоевклидову структуру пространства-времени, как мы видели, можно дать общую формулировку постулата о постоянстве скорости света в инерциальной системе отсчета и для любых допустимых координат пространства-времени.

§ 13. Преобразования между различными обобщенными инерциальными системами отсчета

Рассмотрим некоторую инерциальную систему отсчета, в которой интервал имеет вид (12.11). Найдем собственную группу преобразований координат, оставляющих эту метрику форминвариантной.

Как мы знаем, в случае галилеевой метрики (2.13) данная собственная группа, т. е. группа преобразований координат с якобианом, равным $+1$, является десятипараметрической и состоит из трех собственных подгрупп: четырехпараметрической подгруппы трансляций временной и пространственной координат, трехпараметрической подгруппы трехмерных поворотов системы координат и трехпараметрической подгруппы лоренцевских вращений.

Покажем теперь, что в случае метрики (12.11) также будет существовать десятипараметрическая группа инер-