Используя соотношения (12.9) между различными компонентами метрического тензора, выражение (12.3) для интервала мы можем записать в виде

$$ds^2 = c^2 g_{00}\left[dt^2 - \left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)dx\,dt + \frac{dx^2}{c_1 c_2}\right] - dy^2 - dz^2. \quad (12.11)$$

Интервал (12.11) описывает достаточно произвольную инерциальную систему, в которой координатные скорости света в противоположных направлениях в общем случае не равны. В случае равенства $c_1 = -c_2 = c$ интервал (12.11) принимает галилеев вид (2.13).

Таким образом, в произвольной инерциальной системе отсчета постулат Эйнштейна о постоянстве скорости света (в его формулировке) не выполняется, но тем не менее это обстоятельство никоим образом не сказывается на возможности описания физической реальности в этих системах отсчета. Конечно, зная псевдоевклидову структуру пространства-времени, как мы видели, можно дать общую формулировку постулата о постоянстве скорости света в инерциальной системе отсчета и для любых допустимых координат пространства-времени.

## § 13. Преобразования между различными обобщенными инерциальными системами отсчета

Рассмотрим некоторую инерциальную систему отсчета, в которой интервал имеет вид (12.11). Найдем собственную группу преобразований координат, оставляющих эту метрику форминвариантной.

Как мы знаем, в случае галилеевой метрики (2.13) данная собственная группа, т. е. группа преобразований координат с якобианом, равным $+1$, является десятипараметрической и состоит из трех собственных подгрупп: четырехпараметрической подгруппы трансляций временной и пространственной координат, трехпараметрической подгруппы трехмерных поворотов системы координат и трехпараметрической подгруппы лоренцевских вращений.

Покажем теперь, что в случае метрики (12.11) также будет существовать десятипараметрическая группа инерциальных систем отсчета, в которых координатная скорость света не равна $c$ и зависит от направления распространения. Причем преобразования, соответствующие переходу от одной инерциальной системы отсчета этой группы к другой, оставляют метрику форминвариантной (а следовательно, все уравнения физики будут иметь в любой из этих систем отсчета одинаковую функциональную зависимость от координат, поэтому никаким физическим экспериментом мы не сможем определить, в какой из данной бесконечной совокупности систем отсчета мы находимся), и описание различных физических процессов в этих инерциальных системах отсчета приводит к результатам, которые совпадают с результатами соответствующих экспериментов.

Найдем сначала трехпараметрическую подгруппу преобразований, соответствующую переходу между различными инерциальными системами отсчета, оставляющими метрику форминвариантной.

Поскольку ось $x$ в выражении (12.11') для интервала является выделенной, то следует ожидать, что искомое преобразование имеет наиболее простой вид в случае, когда относительная скорость двух инерциальных систем отсчета направлена вдоль оси $x$. Поэтому сначала рассмотрим этот частный случай, позволяющий с минимальной громоздкостью математических выкладок наиболее наглядно показать все имеющиеся возможности. Обобщение же на случай, когда относительная скорость двух инерциальных систем отсчета имеет произвольное направление, производится тривиально и с принципиальной точки зрения не дает ничего нового.

Вполне очевидно, что в рассматриваемом случае искомое преобразование является линейным:

$$\begin{aligned} x_{\text{с}} &= a x_{\text{н}} + b t_{\text{н}}; & t_{\text{с}} &= q x_{\text{н}} + p t_{\text{н}}; \\ y_{\text{с}} &= y_{\text{н}}; & z_{\text{с}} &= z_{\text{н}}. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Требование форминвариантности метрики (12.11) при преобразовании (13.1) означает, что при этом преобразовании метрика (12.11) должна перейти в метрику

$$ds^2 = c^2 g_{00}\left[dt_{\text{н}}^2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) dt_{\text{н}}\, dx_{\text{н}} + \frac{dx_{\text{н}}^2}{c_1 c_2}\right] - dy_{\text{н}}^2 - dz_{\text{н}}^2. \tag{13.2}$$

Взяв дифференциалы от обеих частей равенств (13.1), подставим их в выражение (12.11). Из сравнения полученного выражения с метрикой (13.2) следует, что требование форминвариантности эквивалентно условиям

$$\Phi_1\Phi_1 = 1; \quad Q_1 Q_2 = \frac{1}{c_1 c_2}; \quad Q_1\Phi_2 + Q_2\Phi_1 = -\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right), \tag{13.3}$$

где введены обозначения

$$Q_1 = q - \frac{a}{c_1}; \quad Q_2 = q - \frac{a}{c_2}; \quad \Phi_1 = p - \frac{b}{c_1}; \quad \Phi_2 = p - \frac{b}{c_2}. \tag{13.4}$$

Решение системы уравнений (13.3), соответствующее преобразованиям с якобианом, равным $+1$, имеет вид

$$\Phi_2 = \frac{1}{\Phi_1}; \quad Q_1 = -\frac{\Phi_1}{c_1}; \quad Q_2 = -\frac{1}{c_2\Phi_1}. \tag{13.5}$$

Определяя из равенств (13.4) и (13.5) параметры $a$, $b$, $p$, $q$ и подставляя их в выражение (13.1), получим

$$x_{\text{с}} = \frac{(c_1 - c_2\Phi_1^2)\,x_{\text{н}} + c_1 c_2(\Phi_1^2 - 1)\,t_{\text{н}}}{\Phi_1(c_1 - c_2)}; \quad t_{\text{с}} = \frac{(1 - \Phi_1^2)\,x_{\text{н}} + (c_1\Phi_1^2 - c_2)\,t_{\text{н}}}{\Phi_1(c_1 - c_2)}. \tag{13.6}$$

Поскольку преобразования (13.6) должны описывать переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, то необходимо потребовать, чтобы какая-либо точка «старой» системы отсчета (например, начало координат) в «новой» системе отсчета двигалась с координатной скоростью $v$ против оси $x$ по закону $x_{\text{н}} = -vt_{\text{н}}$.

Подставляя в первое из выражений (13.6) $x_{\text{с}} = 0$, $x_{\text{н}} = -vt_{\text{н}}$, найдем

$$\Phi_1^2 = \frac{c_1(v + c_2)}{c_2(v + c_1)}.$$

Тогда преобразования (13.6) примут вид

$$
\begin{aligned}
x_{\text{с}} &= \frac{x_{\text{н}} + vt_{\text{н}}}{\sqrt{(1+v/c_1)(1+v/c_2)}}; \\
t_{\text{с}} &= \frac{t_{\text{н}}\left(1+\frac{v}{c_1}+\frac{v}{c_2}\right) - \frac{v}{c_1 c_2}x_{\text{н}}}{\sqrt{(1+v/c_1)(1+v/c_2)}}; \\
y_{\text{с}} &= y_{\text{н}}; \quad z_{\text{с}} = z_{\text{н}}.
\end{aligned}
\tag{13.7}
$$

Обратные преобразования имеют вид

$$
\begin{aligned}
x_{\text{н}} &= \frac{\left(1+\frac{v}{c_1}+\frac{v}{c_2}\right)x_{\text{с}} - vt_{\text{с}}}{\sqrt{(1+v/c_1)(1+v/c_2)}}; \\
t_{\text{н}} &= \frac{t_{\text{с}} + \frac{v}{c_1 c_2}x_{\text{с}}}{\sqrt{(1+v/c_1)(1+v/c_2)}}; \\
y_{\text{н}} &= y_{\text{с}}; \quad z_{\text{н}} = z_{\text{с}}.
\end{aligned}
\tag{13.8}
$$

Таким образом, в случае метрики (12.11) формулы преобразования, соответствующие переходу между различными инерциальными системами отсчета, существенно отличаются от преобразований Лоренца. В частном случае $c_1 = -c_2 = c$ преобразования (13.7) и (13.8) переходят в преобразования Лоренца. Следует также отметить, что если прямые и обратные преобразования Лоренца связаны достаточно просто изменением $v$ на $-v$, то в общем случае между преобразованиями (13.7) и (13.8) такой связи нет.

Преобразования (13.7) оставляют выражение (12.11) для интервала форминвариантным и заменяют собой преобразования Лоренца в случае обобщенных инерциальных систем отсчета. В рассмотренном нами случае относительная координатная скорость **v** (параметр группы преобразования) обобщенных инерциальных систем отсчета была направлена вдоль оси $x$. Если же относительная скорость инерциальных систем отсчета имеет составляющие и вдоль других осей, то формулы преобразования существенно усложняются.

Так, например, если относительная (физическая) скорость инерциальных систем отсчета, у которых пространственные оси параллельны и одинаково направлены, имеет составляющие $\mathbf{V} = [V^x, V^y, 0]$, то преобразования, оставляющие форминвариантной метрику (12.11) и соответствующие переходу между различными обобщенными инерциальными системами отсчета, будут иметь вид

$$\begin{aligned}
x_c = \frac{2c}{c_2-c_1}\Bigg[x_н\Bigg[\frac{c_2-c_1}{2c}\left(\frac{V_y^2}{V^2}+\frac{V_x^2}{V^2\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)-\\
-\frac{c_1+c_2}{2c^2}\frac{V^x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\Bigg]+\frac{y_н}{\sqrt{-g_{11}}}\Bigg[\frac{(c_2-c_1)V^xV^y}{2cV^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-1\right)-\\
-\frac{c_1+c_2}{2c^2}\frac{V^y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\Bigg]+t_н\Bigg[\frac{c_1^2-c_2^2}{4c}\left(\frac{V_y^2}{V^2}+\frac{V_x^2}{V^2\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)-\\
-\frac{c_1^2-c_2^2}{4c\sqrt{1-V^2/c^2}}-\frac{c_1c_2V^x}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}\Bigg]\Bigg];\\
y_c=\sqrt{-g_{11}}\Bigg[x_н\frac{V^xV^y}{V^2}\left[\frac{1}{1-V^2/c^2}-1\right]+\\
+\frac{y_н}{\sqrt{-g_{11}}}\left[\frac{V_x^2}{V^2}+\frac{V_y^2}{V^2\sqrt{1-V^2/c^2}}\right]+\\
+t_н\Bigg[\frac{c_1-c_2}{2c}\frac{V^y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-\frac{c_1+c_2}{2}\frac{V^xV^y}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-1\right)\Bigg]\Bigg];\\
t_c=\frac{2c}{(c_1-c_2)\sqrt{1-V^2/c^2}}\Bigg[\frac{x_нV^x}{c^2}+\frac{y_нV^y}{c^2\sqrt{-g_{11}}}+\\
+t_н\left[\frac{c_1-c_2}{2c}-\frac{(c_1+c_2)V^x}{2c^2}\right]\Bigg];\\
z_c=z_н.
\end{aligned}\tag{13.9}$$

При $c_1=-c_2=c$ преобразования (13.9) переходят в соответствующие преобразования Лоренца:

$$\begin{aligned}
X_c = X_н\left[\frac{V_y^2}{V^2}+\frac{V_x^2}{V^2\sqrt{1-V^2/c^2}}\right]+\\
+Y_н\frac{V^xV^y}{V^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-1\right]+\frac{V^xT_н}{\sqrt{1-V^2/c^2}};\\
Y_c=X_н\frac{V^xV^y}{V^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-1\right]+\\
+Y_н\left[\frac{V_x^2}{V^2}+\frac{V_y^2}{V^2\sqrt{1-V^2/c^2}}\right]+\frac{V^yT_н}{\sqrt{1-V^2/c^2}};\\
T_c=\frac{X_нV^x+Y_нY^y+c^2T_н}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}};\quad Z_c=Z_н.
\end{aligned}$$

Таким образом, и в общем случае произвольных инерциальных систем отсчета существует трехпараметрическая (параметрами которой являются 3 компоненты относительной скорости **V**) подгруппа преобразований координат, оставляющих метрику форминвариантной и соответствующих переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

## § 14. Подгруппа трансляций и вращений

Покажем теперь, что в случае обобщенных инерциальных систем отсчета существуют подгруппы трансляций и трехмерных вращений, оставляющих метрику (12.11) форминвариантной.

Легко убедиться, что подгруппа трансляций временной ($i=0$) и пространственных ($i=1, 2, 3$) координат

$$x^i_{\text{с}} = x^i_{\text{н}} + a^i \tag{14.1}$$

на постоянный вектор $a^i$ оставляет метрику (12.11) форминвариантной. Действительно, из выражения (14.1) следует, что

$$dx^i_{\text{с}} = dx^i_{\text{н}}.$$

Используя это соотношение и учитывая, что компоненты метрического тензора в выражении (12.11) не зависят от координат явным образом, метрику (12.11) мы можем записать в виде (13.2), что и доказывает ее форминвариантность при преобразовании (14.1).

Замечая далее, что метрика (12.11) в плоскости $yz$ совпадает с метрикой евклидовой плоскости, заключаем, что метрика (12.11) остается форминвариантной и при преобразовании поворота трехмерной системы координат вокруг оси $x$ на произвольный постоянный угол.

Найдем еще два преобразования, описывающие в одной и той же обобщенной инерциальной системе отсчета повороты вокруг осей $y$ и $z$ на произвольные постоянные углы и оставляющие метрику (12.11) форминвариантной. Тогда поворот вокруг произвольной оси в обобщенной инерциальной системе отсчета будет описываться соответствующим произведением поворотов вокруг осей $x$, $y$ и $z$, взятых в определенном порядке. Заметим также, что нам достаточно найти преобразование поворота вокруг одной из осей, скажем, вокруг оси $y$, так как поворотом вокруг