(параметрами которой являются 3 компоненты относительной скорости $\mathbf{V}$) подгруппа преобразований координат, оставляющих метрику форминвариантной и соответствующих переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

§ 14. Подгруппа трансляций и вращений

Покажем теперь, что в случае обобщенных инерциальных систем отсчета существуют подгруппы трансляций и трехмерных вращений, оставляющих метрику (12.11) форминвариантной.

Легко убедиться, что подгруппа трансляций временной ($i=0$) и пространственных ($i=1, 2, 3$) координат

$$x^i_{\text{с}} = x^i_{\text{н}} + a^i \tag{14.1}$$

на постоянный вектор a^i оставляет метрику (12.11) форминвариантной. Действительно, из выражения (14.1) следует, что

$$dx^i_{\text{с}} = dx^i_{\text{н}}.$$

Используя это соотношение и учитывая, что компоненты метрического тензора в выражении (12.11) не зависят от координат явным образом, метрику (12.11) мы можем записать в виде (13.2), что и доказывает ее форминвариантность при преобразовании (14.1).

Замечая далее, что метрика (12.11) в плоскости yz совпадает с метрикой евклидовой плоскости, заключаем, что метрика (12.11) остается форминвариантной и при преобразовании поворота трехмерной системы координат вокруг оси x на произвольный постоянный угол.

Найдем еще два преобразования, описывающие в одной и той же обобщенной инерциальной системе отсчета повороты вокруг осей y и z на произвольные постоянные углы и оставляющие метрику (12.11) форминвариантной. Тогда поворот вокруг произвольной оси в обобщенной инерциальной системе отсчета будет описываться соответствующим произведением поворотов вокруг осей x, y и z, взятых в определенном порядке. Заметим также, что нам достаточно найти преобразование поворота вокруг одной из осей, скажем, вокруг оси y, так как поворотом вокруг оси x мы всегда можем совместить любую ось вращения, лежащую в плоскости xy, с осью y.

Как известно [14], наиболее общее преобразование координат, не изменяющее системы отсчета, имеет вид

$$x'^{\alpha} = f^{\alpha}(x^{\beta}); \quad x'^{0} = f^{0}(x^{\beta}, x^{0}).$$

В силу симметрии задачи искомые преобразования координат запишем в виде

$$\begin{aligned} x_{\text{с}} &= F(x_{\text{н}}, z_{\text{н}}); & z_{\text{с}} &= \Phi(x_{\text{н}}, z_{\text{н}}); \\ t_{\text{с}} &= \Psi(t_{\text{н}}, x_{\text{н}}, z_{\text{н}}); & y_{\text{с}} &= y_{\text{н}}. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Так как в нашем случае компоненты метрического тензора (12.11) не зависят от координат явным образом, то условия форминвариантности метрики (12.11) при преобразованиях координат (14.2) в силу тензорного закона преобразования метрического тензора

$$g^{\text{н}}_{ik}(x_{\text{н}}) = \frac{\partial x^{l}_{\text{с}}}{\partial x^{i}_{\text{н}}} \frac{\partial x^{m}_{\text{с}}}{\partial x^{k}_{\text{н}}} g^{\text{с}}_{lm}(x_{\text{с}}(x_{\text{н}}))$$

примут вид

$$\begin{aligned} g_{00} &= \Psi_t^2 g_{00}; \\ g_{01} &= c\Psi_t\Psi_x g_{00} + \Psi_t F_x g_{01}; \\ 0 &= c\Psi_t\Psi_z g_{00} + \Psi_t F_z g_{01}; \\ g_{11} &= c^2\Psi_x^2 g_{00} + 2c\Psi_x F_x g_{01} + g_{11}F_x^2 - \Phi_x^2; \\ 0 &= c^2\Psi_x\Psi_z g_{00} + c[\Psi_x F_z + \Psi_z F_x] g_{01} + g_{11}F_x F_z - \Phi_x\Phi_z; \\ -1 &= c^2\Psi_z^2 g_{00} + 2c\Psi_z F_z g_{01} + g_{11}F_z^2 - \Phi_z^2, \end{aligned} \tag{14.3}$$

где введены обозначения

$$\Psi_t = \frac{\partial\Psi}{\partial t_{\text{н}}}; \quad \Psi_x = \frac{\partial\Psi}{\partial x_{\text{н}}}; \quad \Psi_z = \frac{\partial\Psi}{\partial z_{\text{н}}}; \quad F_x = \frac{\partial F}{\partial x_{\text{н}}};$$
$$F_z = \frac{\partial F}{\partial z_{\text{н}}}; \quad \Phi_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x_{\text{н}}}; \quad \Phi_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z_{\text{н}}}.$$

Тогда из первого уравнения системы (14.3) следует, что

$$\Psi = t_{\text{н}} + u(x_{\text{н}}, z_{\text{н}}).$$

Из второго и третьего уравнений имеем

$$\begin{aligned} u_z &= -F_z \frac{g_{01}}{cg_{00}}; \\ u_x &= \frac{g_{01}}{cg_{00}}[1 - F_x]. \end{aligned} \tag{14.4}$$

Подставляя эти соотношения в четвертое и шестое уравнения, получим, что

$$\begin{aligned}\Phi_z &= \pm\sqrt{1-F_z^2\left(\frac{g_{01}^2}{g_{00}}-g_{11}\right)};\\ \Phi_x &= \pm\sqrt{(1-F_x^2)\left(\frac{g_{01}^2}{g_{00}}-g_{11}\right)}.\end{aligned} \tag{14.5}$$

Тогда с учетом соотношений (14.4) и (14.5) оставшееся уравнение системы (14.3) приведем к виду

$$F_x^2-1+F_x^2\left(\frac{g_{01}^2}{g_{00}}-g_{11}\right)=0. \tag{14.6}$$

Решение этого нелинейного дифференциального уравнения будем искать методом Лагранжа—Шарпи.

Вводя обозначения $P_1=F_x$, $P_2=F_z$ и составляя характеристическую систему, соответствующую уравнению (14.6), получим

$$\frac{dx_н}{2P_1}=\frac{dz_н}{2P_2\left(\frac{g_{01}^2}{g_{00}}-g_{11}\right)}=-\frac{dF}{2}=\frac{dP_1}{0}=\frac{dP_2}{0}.$$

Отсюда следует, что P_1 и P_2 являются константами:

$$F_x=P_1=\alpha=\mathrm{const};\quad F_z=P_2=\beta=\mathrm{const}. \tag{14.7}$$

Однако постоянные P_1 и P_2 не являются независимыми; подставляя соотношения (14.7) в уравнение (14.6), имеем

$$1-\alpha^2=\beta^2\left(\frac{g_{01}^2}{g_{00}}-g_{11}\right)=\beta^2\varkappa_{11}.$$

Это равенство будет выполнено, если предположить

$$\alpha=\pm\cos q;\quad \beta=\mp\frac{\sin q}{\sqrt{\varkappa_{11}}}.$$

Тогда из соотношений (14.7) следует, что

$$F=\pm x_н\cos q\mp\frac{z_н\sin q}{\sqrt{\varkappa_1}}+x_0.$$

Поскольку инверсии знака координат и трехмерные трансляции нас не интересуют, то имеем

$$F=x_н\cos q-\frac{z_н\sin q}{\sqrt{\varkappa_{11}}}. \tag{14.8}$$

Подставляя выражение (14.8) в уравнения (14.4) и (14.5) и решая их аналогичным способом, получим

$$\Phi = x_{\text{н}} \sqrt{\varkappa_{11}} \sin q + z_{\text{н}} \cos q;$$
$$u = x_{\text{н}} \frac{g_{01}}{c g_{00}} (1 - \cos q) + z_{\text{н}} \frac{g_{01} \sin q}{c g_{00} \sqrt{\varkappa_{11}}}.$$

Таким образом, преобразования поворота вокруг оси y, оставляющие метрику (12.11) форминвариантной, имеют вид

$$\begin{aligned} t_{\text{с}} &= t_{\text{н}} + x_{\text{н}} \frac{g_{01}}{c g_{00}} (1 - \cos q) + z_{\text{н}} \frac{g_{01} \sin q}{c g_{00} \sqrt{\varkappa_{11}}}; \\ x_{\text{с}} &= x_{\text{н}} \cos q - z_{\text{н}} \frac{\sin q}{\sqrt{\varkappa_{11}}}; \\ z_{\text{с}} &= x_{\text{н}} \sqrt{\varkappa_{11}} \sin q + z_{\text{н}} \cos q; \\ y_{\text{с}} &= y_{\text{н}}. \end{aligned} \tag{14.9}$$

Обратные преобразования определяются выражениями

$$\begin{aligned} t_{\text{н}} &= t_{\text{с}} + x_{\text{с}} \frac{g_{01}}{c g_{00}} (1 - \cos q) - z_{\text{с}} \frac{g_{01} \sin q}{c g_{00} \sqrt{\varkappa_{11}}}; \\ x_{\text{н}} &= x_{\text{с}} \cos q + z_{\text{с}} \frac{\sin q}{\sqrt{\varkappa_{11}}}; \\ z_{\text{н}} &= -x_{\text{с}} \sqrt{\varkappa_{11}} \sin q + z_{\text{с}} \cos q; \\ y_{\text{н}} &= y_{\text{с}}. \end{aligned} \tag{14.10}$$

Как видно из выражений (14.9) и (14.10), преобразование поворота системы координат вокруг оси y затрагивает и координатное время t, поскольку переменные t и x не являются в рассматриваемом нами случае ортогональными.

Таким образом, прямыми вычислениями мы убедились, что и в произвольных допустимых координатах псевдоевклидова пространства-времени существует десятипараметрическая группа преобразований, оставляющих метрику этого пространства-времени форминвариантной.

Это и не удивительно, поскольку наличие или отсутствие такой группы целиком диктуется структурой пространства-времени и ни в коей мере не зависит от выбора допустимых координат. В любой допустимой системе координат, при любом способе арифметизации точек пространство-время Минковского всегда остается плоским и тензор кривизны его, характеризующий внутренние свойства пространства-времени, при этом всегда равен нулю.

§ 15. Сложение координатных скоростей

Давайте теперь установим закон сложения координатных скоростей при преобразованиях (13.8). Пусть, например, в «старой» системе координат компоненты координатной скорости некоторого тела имеют вид $v_c^x = dx_c/dt_c$, $v_c^y = dy_c/dt_c$, $v_c^z = dz_c/dt_c$.

Найдем теперь компоненты координатной скорости этого тела в «новой» системе, движущейся относительно «старой» с координатной скоростью v. Для этого разделим дифференциалы координат $dx_н$, $dy_н$ и $dz_н$ на дифференциал $dt_н$. В результате получим

$$v_н^x = \frac{dx_н}{dt_н} = \frac{\left(1+\frac{v}{c_1}+\frac{v}{c_2}\right) v_c^x - v}{1+\frac{v v_c^x}{c_1 c_2}};$$
$$v_н^y = \frac{dy_н}{dt_н} = \frac{v_c^y \sqrt{\left(1+\frac{v}{c_1}\right)\left(1+\frac{v}{c_2}\right)}}{1+\frac{v v_c^x}{c_1 c_2}}; \qquad (15.1)$$
$$v_н^z = \frac{dz_н}{dt_н} = \frac{v_c^z \sqrt{\left(1+\frac{v}{c_1}\right)\left(1+\frac{v}{c_2}\right)}}{1+\frac{v v_c^x}{c_1 c_2}}.$$

Таким образом, закон сложения координатных скоростей (15.1) при переходе между различными системами отсчета (13.8) существенно отличается от закона сложения скоростей при преобразованиях Лоренца, хотя при $c_1 = -c_2 = c$ и совпадает с ним. Отметим также, что скорости c_1 и c_2 являются предельными скоростями движения вдоль и против направления оси x соответственно. Действительно, исследуя первое из выражений (15.1) на экстремум при условии $c_1 > v > c_2$, можно убедиться, что $v_н^x$ достигает минимума при $v_c^x = c_2$ $(c_2 < 0)$ и максимума при $v_н^x = c_1$. Кроме того, интересно отметить, что подставляя в первую из формул (15.1) $v_c^x = c_1$, получим