странство-время Минковского всегда остается плоским и тензор кривизны его, характеризующий внутренние свойства пространства-времени, при этом всегда равен нулю.

§ 15. Сложение координатных скоростей

Давайте теперь установим закон сложения координатных скоростей при преобразованиях (13.8). Пусть, например, в «старой» системе координат компоненты координатной скорости некоторого тела имеют вид $v_{\text{с}}^x = dx_{\text{с}}/dt_{\text{с}}$, $v_{\text{с}}^y = dy_{\text{с}}/dt_{\text{с}}$, $v_{\text{с}}^z = dz_{\text{с}}/dt_{\text{с}}$.

Найдем теперь компоненты координатной скорости этого тела в «новой» системе, движущейся относительно «старой» с координатной скоростью v. Для этого разделим дифференциалы координат $dx_{\text{н}}$. $dy_{\text{н}}$ и $dz_{\text{н}}$ на дифференциал $dt_{\text{н}}$. В результате получим

$$v_{\text{н}}^x = \frac{dx_{\text{н}}}{dt_{\text{н}}} = \frac{\left(1+\frac{v}{c_1}+\frac{v}{c_2}\right) v_{\text{с}}^x - v}{1+\frac{v v_{\text{с}}^x}{c_1 c_2}};$$

$$v_{\text{н}}^y = \frac{dy_{\text{н}}}{dt_{\text{н}}} = \frac{v_{\text{с}}^y \sqrt{\left(1+\frac{v}{c_1}\right)\left(1+\frac{v}{c_2}\right)}}{1+\frac{v v_{\text{с}}^x}{c_1 c_2}}; \qquad (15.1)$$

$$v_{\text{н}}^z = \frac{dz_{\text{н}}}{dt_{\text{н}}} = \frac{v_{\text{с}}^z \sqrt{\left(1+\frac{v}{c_1}\right)\left(1+\frac{v}{c_2}\right)}}{1+\frac{v v_{\text{с}}^x}{c_1 c_2}}.$$

Таким образом, закон сложения координатных скоростей (15.1) при переходе между различными системами отсчета (13.8) существенно отличается от закона сложения скоростей при преобразованиях Лоренца, хотя при $c_1 = -c_2 = c$ и совпадает с ним. Отметим также, что скорости c_1 и c_2 являются предельными скоростями движения вдоль и против направления оси x соответственно. Действительно, исследуя первое из выражений (15.1) на экстремум при условии $c_1 > v > c_2$, можно убедиться, что $v_{\text{н}}^x$ достигает минимума при $v_{\text{с}}^x = c_2$ $(c_2 < 0)$ и максимума при $v_{\text{н}}^x = c_1$. Кроме того, интересно отметить, что подставляя в первую из формул (15.1) $v_{\text{с}}^x = c_1$, получим что и $v_{\text{н}}^x = c_1$. Если предположить $v_{\text{c}}^x = c_2$, то имеем $v_{\text{н}}^x = c_2$. Таким образом, в любой инерциальной системе (13.8) координатная скорость света в положительном направлении оси x равна c_1, а в противоположном направлении c_2, что и следовало ожидать.

Рассмотрим теперь закон сложения физических скоростей при преобразованиях координат и времени (13.8). Будем обозначать физическую скорость большой буквой V, в отличие от координатной скорости v.

Как мы уже говорили, компоненты физической скорости определяются через отношение физических времени (10.12) и расстояний (10.13). Используя метрику (12.11), найдем, что в нашем случае

$$\varkappa_{11} = g_{00} \frac{c^2 (c_2 - c_1)^2}{4 (c_1 c_2)^2}; \quad \varkappa_{22} = 1; \quad \varkappa_{33} = 1; \qquad g_{01} = -\frac{c}{2c_1 c_2} (c_1 + c_2) g_{00}. \tag{15.2}$$

Тогда выражение для компоненты V^x физической скорости

$$V^x = \frac{dl^x}{d\tau} = \frac{\sqrt{\varkappa_{11}}\, dx}{dt \sqrt{g_{00}} + \frac{g_{01}\, dx}{c \sqrt{g_{00}}}} = \frac{\sqrt{\varkappa_{11}}\, v^x}{\sqrt{g_{00}} + \frac{g_{01} v^x}{c \sqrt{g_{00}}}} \tag{15.3}$$

мы можем записать в виде

$$V^x = c \frac{(c_2 - c_1) v^x}{2c_1 c_2 - (c_1 + c_2) v^x}. \tag{15.4}$$

Разрешая это уравнение относительно компоненты v^x координатной скорости, получим

$$v^x = \frac{2c_1 c_2 V^x}{c (c_2 - c_1) + (c_1 + c_2) V^x}. \tag{15.5}$$

Совершенно аналогично из выражений

$$V^y = \frac{dl^y}{d\tau} = \frac{v^y}{\sqrt{g_{00}} \left[1 - \frac{(c_1 + c_2)}{2c_1 c_2} v^x \right]}; \qquad V^z = \frac{dl^z}{d\tau} = \frac{v^z}{\sqrt{g_{00}} \left[1 - \frac{(c_1 + c_2)}{2c_1 c_2} v^x \right]} \tag{15.6}$$

мы можем определить и остальные компоненты координатной скорости:

$$\begin{aligned} v^y &= \frac{c(c_2-c_1)\sqrt{g_{00}}\,V^y}{[(c_1+c_2)V^x+c(c_2-c_1)]}; \\ v^z &= \frac{c(c_2-c_1)\sqrt{g_{00}}\,V^z}{[(c_1+c_2)V^x+c(c_2-c_1)]}. \end{aligned} \tag{15.7}$$

Пусть некоторое тело в «старой» системе отсчета имеет физическую скорость $\mathbf{V}_{(1)}$. Найдем физическую скорость $\mathbf{V}_{(2)}$ в «новой» системе отсчета, движущейся вдоль оси x со скоростью V относительно «старой».

Как следует из выражений (15.4) и (15.6), компоненты физической скорости $\mathbf{V}_{(2)}$ связаны с компонентами координатной скорости $\mathbf{v}_{(2)}$ зависимостью

$$\begin{aligned} V^x_{(2)} &= \frac{c(c_2-c_1)\,v^x_{(2)}}{2c_1c_2-(c_1+c_2)\,v^x_{(2)}}; \\ V^y_{(2)} &= \frac{v^y_{(2)}}{\sqrt{g_{00}}\left[1-\dfrac{c_1+c_2}{2c_1c_2}\,v^x_{(2)}\right]}; \\ V^z_{(2)} &= \frac{v^z_{(2)}}{\sqrt{g_{00}}\left[1-\dfrac{c_1+c_2}{2c_1c_2}\,v^x_{(2)}\right]}. \end{aligned} \tag{15.8}$$

Компоненты же координатной скорости $\mathbf{v}_{(2)}$ в «новой» системе отсчета связаны с компонентами $\mathbf{v}_{(1)}$ этой скорости в «старой» системе зависимостью (15.1). Подставляя выражения (15.1) в (15.8), учитывая связь (15.5) и (15.7) между компонентами координатной скорости $\mathbf{v}_{(1)}$ и физической скорости $\mathbf{V}_{(1)}$, а также вспоминая, что

$$v = -\frac{dx_{\text{н}}}{dt_{\text{н}}} = -\frac{2c_1c_2V}{[(c_1+c_2)V+c(c_2-c_1)]}, \tag{15.9}$$

получим формулы сложения физических скоростей:

$$\begin{aligned} V^x_{(2)} &= \frac{V^x_{(1)}+V}{1+\dfrac{VV^x_{(1)}}{c^2}}; \\ V^y_{(2)} &= \frac{V^y_{(1)}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\dfrac{VV^x_{(1)}}{c^2}}; \\ V^z_{(2)} &= \frac{V^z_{(1)}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\dfrac{VV^x_{(1)}}{c^2}}. \end{aligned} \tag{15.10}$$

Таким образом, в этом случае сложение физических скоростей такое же, как и в системе координат, где метрика диагональна. Следовательно, мы видим, что, хотя описание может быть произведено в произвольных координатах и оно несколько отличается от случая диагональной метрики, для физических величин мы всегда будем получать совпадающие с этим случаем выражения.

Далее, из выражения (15.4) следует, что физическая скорость света, распространяющегося в положительном направлении оси x ($v^x = c_1$, $v^y = v^z = 0$), по абсолютной величине равна физической скорости света, распространяющегося в противоположном направлении ($v^x = c_2$, $v^y = v^z = 0$), и совпадает с электродинамической постоянной c.

Отметим также, что, хотя координатные скорости тел могли быть любыми по величине (но не превышали, конечно, координатные скорости света c_1 и c_2), физические скорости никогда не могут быть больше c, т. е. $V < c$.

§ 16. Примеры обобщенных инерциальных систем отсчета

Рассмотрим несколько примеров обобщенных инерциальных систем отсчета. Для построения обобщенной инерциальной системы отсчета, как мы видели, следует совершить переход от галилеевых координат (T, X, Y, Z) к новым координатам (t, x, y, z), связанным с галилеевыми координатами соотношениями (12.2). Поскольку преобразование (12.2) линейно, то в общем случае оно описывает поворот осей x и t в плоскости XT, причем после поворота ось x может быть и не ортогональной оси t. Таким образом, повороты каждой из осей x и t в плоскости XT на произвольные, не обязательно равные, углы являются генераторами общего преобразования (12.2), поэтому уместно рассмотреть эти два преобразования раздельно.

1. Поворот оси x без изменения ориентации оси t описывается преобразованием Галилея

$$X = x - ut; \quad T = t. \tag{16.1}$$

Компоненты метрического тензора можно получить из выражения (12.4), если учесть, что в рассматриваемом