бора систем отсчета, имеющих форминвариантную метрику, мы находимся? Открытие псевдоевклидовой геометрии пространства-времени позволило нам сформулировать физические законы как в инерциальных, так и в неинерциальных системах отсчета и этим самым опровергнуть ошибочное утверждение о неприменимости специальной теории относительности к ускоренным системам отсчета.

Покажем на примере релятивистски равноускоренной системы отсчета, каким образом можно найти все совокупности систем отсчета, метрика которых форминвариантна метрике исходной системы отсчета.

## § 19. Релятивистски равноускоренное движение

Для построения релятивистски равноускоренной системы отсчета нам необходимо прежде всего выяснить, какое движение следует называть релятивистски равноускоренным.

Как известно, в классической механике равноускоренным движением материальной точки называется движение под действием постоянной по величине и направлению силы

$$f^\alpha = \text{const}. \tag{19.1}$$

Перенося это определение на релятивистский случай, естественно называть релятивистски равноускоренным движением такое движение, которое происходит под действием постоянной по величине и направлению силы (19.1), но удовлетворяет уже уравнениям релятивистской механики:

$$m_0 c \frac{du^i}{ds} = F^i, \tag{19.2}$$

где $u^i = dx^i/ds$ — 4-вектор скорости частицы

$$u^i = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right]; \tag{19.3}$$

$F^i$ — 4-вектор силы

$$F^i = \left[\frac{\mathbf{fv}}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{f^\alpha}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right]; \tag{19.4}$$

$f^\alpha$ — обычная трехмерная сила.

Интервал для движущейся частицы в галилеевых координатах, как обычно, имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{19.5}$$

Учитывая, что для частицы, движущейся по закону

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

дифференциалы $dx$, $dy$ и $dz$ не являются независимыми, а связаны с дифференциалом $dt$ соотношениями

$$dx = v^x dt; \quad dy = v^y dt; \quad dz = v^z dt,$$

интервал (19.5) приведем к виду

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{19.6}$$

Отметим, что величина $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ называется собственным временем движущейся частицы.

Уравнения движения (19.2) с учетом выражений (19.3), (19.4) и (19.6) принимают вид

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} &= \frac{\mathbf{fv}}{c^2}; \\ m_0 \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} &= \mathbf{f}. \end{aligned} \tag{19.7}$$

Эти уравнения впервые написал Пуанкаре [3], хотя обычно считают, что это сделал Планк [17]. Легко убедиться, что для малых скоростей ($v/c \ll 1$) уравнения (19.7) переходят в обычные уравнения Ньютона:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v^2}{2} = \mathbf{fv}; \quad m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}.$$

Покажем теперь, что первое из уравнений (19.7) является следствием остальных и может быть опущено. Для этого запишем трехмерные уравнения движения (19.7) в виде

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{m_0 \mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \left(\frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = \mathbf{f}. \tag{19.8}$$

Умножая уравнение (19.8) скалярно на $\mathbf{v}/c^2$, получим

$$\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)=\frac{\mathbf{v}}{c^2}\mathbf{f}. \tag{19.9}$$

Преобразуя левую часть этого уравнения, приходим к первому уравнению системы (19.7)

$$m_0\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)=\mathbf{f}\frac{\mathbf{v}}{c^2}.$$

Отметим также, что в силу уравнения (19.9) релятивистские уравнения движения (19.8) мы можем записать в квазиклассическом виде:

$$m_0\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\left[\mathbf{f}-\frac{\mathbf{v}}{c^2}(\mathbf{v}\mathbf{f})\right]\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Таким образом, релятивистски равноускоренное движение должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{\mathbf{f}}{m_0}=\mathbf{w}=\text{const}. \tag{19.10}$$

Найдем, по какому закону изменяются с течением времени координаты материальной точки, движущейся релятивистски равноускоренно. Интегрируя уравнение (19.10) по времени, получим

$$\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0;\quad \mathbf{v}_0=\frac{\mathbf{v}(0)}{\sqrt{1-v^2(0)/c^2}}. \tag{19.11}$$

Разделим это равенство на $c$, возведем обе части его в квадрат и прибавим к его правой и левой частям по единице. В результате получим

$$\frac{1}{1-v^2/c^2}=1+\frac{(\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0)^2}{c^2}. \tag{19.12}$$

Тогда из выражений (19.11) и (19.12) имеем

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0}{\sqrt{1+\dfrac{(\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0)^2}{c^2}}}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим закон релятивистски равноускоренного движения:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\frac{\mathbf{w}c^2}{w^2}\left[\sqrt{1+\frac{(\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0)^2}{c^2}}-1\right]+$$

$$+\frac{c}{w}\left(\mathbf{v}_0-\mathbf{w}\,\frac{(\mathbf{v}_0\mathbf{w})}{w^2}\right)\ln\left[\frac{wt}{c}+\frac{\mathbf{v}_0\mathbf{w}}{cw}+\sqrt{1+\frac{(\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0)^2}{c^2}}\right]. \tag{19.13}$$

Собственное время частицы будет изменяться при этом по закону

$$\tau=t_0+\frac{c}{w}\ln\left[\frac{wt}{c}+\frac{\mathbf{v}_0\mathbf{w}}{cw}+\sqrt{1+\frac{(\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0)^2}{c^2}}\right]^2. \tag{19.14}$$

## § 20. Группа релятивистски равноускоренных систем отсчета

Пусть инерциальная и релятивистски равноускоренная система отсчета имеют одинаковую ориентацию осей координат, и релятивистски равноускоренная система движется без начальной скорости ($\mathbf{v}_0=0$) вдоль оси $x$ инерциальной системы отсчета. Тогда, если считать, что при $t=0$ их начала координат совпадали, из выражения (19.13) получим закон движения начала координат релятивистски равноускоренной системы отсчета:

$$x_0=\frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}-1\right].$$

Поэтому формулы преобразования координат при переходе от инерциальной системы отсчета ($X$, $T$) к релятивистски равноускоренной системе ($x$, $t$) будут иметь вид

$$x=X-x_0=X-\frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1+\frac{w^2T^2}{c^2}}-1\right].$$

Преобразование времени можно задать произвольно. Рассмотрим последовательно два наиболее интересных случая:

а) когда время остается одним и тем же в обеих системах отсчета:

$$t=T;$$