Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим закон релятивистски равноускоренного движения:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\frac{\mathbf{w}c^2}{w^2}\left[\sqrt{1+\frac{(\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0)^2}{c^2}}-1\right]+$$

$$+\frac{c}{w}\left(\mathbf{v}_0-\mathbf{w}\,\frac{(\mathbf{v}_0\mathbf{w})}{w^2}\right)\ln\left[\frac{wt}{c}+\frac{\mathbf{v}_0\mathbf{w}}{cw}+\sqrt{1+\frac{(\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0)^2}{c^2}}\right]. \tag{19.13}$$

Собственное время частицы будет изменяться при этом по закону

$$\tau=t_0+\frac{c}{w}\ln\left[\frac{wt}{c}+\frac{\mathbf{v}_0\mathbf{w}}{cw}+\sqrt{1+\frac{(\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0)^2}{c^2}}\right]^2. \tag{19.14}$$

§ 20. Группа релятивистски равноускоренных систем отсчета

Пусть инерциальная и релятивистски равноускоренная система отсчета имеют одинаковую ориентацию осей координат, и релятивистски равноускоренная система движется без начальной скорости ($\mathbf{v}_0=0$) вдоль оси x инерциальной системы отсчета. Тогда, если считать, что при $t=0$ их начала координат совпадали, из выражения (19.13) получим закон движения начала координат релятивистски равноускоренной системы отсчета:

$$x_0=\frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}-1\right].$$

Поэтому формулы преобразования координат при переходе от инерциальной системы отсчета (X, T) к релятивистски равноускоренной системе (x, t) будут иметь вид

$$x=X-x_0=X-\frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1+\frac{w^2T^2}{c^2}}-1\right].$$

Преобразование времени можно задать произвольно. Рассмотрим последовательно два наиболее интересных случая:

а) когда время остается одним и тем же в обеих системах отсчета:

$$t=T;$$

б) когда в качестве времени выбирается собственное время какой-либо точки (например, начала координат) ускоренной системы отсчета:

$$t=\frac{c}{w}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{wT}{c}=\frac{c}{w}\ln\left[\frac{wT}{c}+\sqrt{1+\frac{w^2T^2}{c^2}}\right].$$

Для первого случая имеем

$$x=X-\frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1+\frac{w^2T^2}{c^2}}-1\right];\quad t=T. \tag{20.1}$$

Отметим, что при отсутствии ускорения ($w=0$) данное преобразование превращается в тождественное преобразование

$$x=X,\quad t=T.$$

При преобразовании (20.1) метрика псевдоевклидова пространства-времени принимает вид

$$ds^2=\frac{c^2\,dt^2}{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}-\frac{2wt\,dt\,dx}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}-dx^2-dy^2-dz^2. \tag{20.2}$$

Изучим, какие преобразования координат оставляют метрику (20.2) форминвариантной. Как известно, в псевдоевклидовом пространстве-времени существует десятипараметрическая группа бесконечно малых движений, оставляющих метрику этого пространства-времени форминвариантной. Наличие десяти векторов Киллинга гарантирует нам существование десяти законов сохранения в любой системе отсчета псевдоевклидова пространства-времени.

Однако в данном случае нам необходимо провести анализ группы конечных преобразований координат, оставляющих метрику (20.2) форминвариантной, а не бесконечно малых движений, характеризуемых векторами Киллинга.

Легко убедиться, что преобразования трансляции пространственных координат

$$x'^{\alpha}=x^{\alpha}+a^{\alpha}$$

на постоянный вектор a^{α} оставляют метрику (20.2) форминвариантной.

Действительно, поскольку метрический тензор γ_{ni} не зависит от пространственных координат, а множители

$\partial x'^{\alpha}/\partial x^{\beta}$ образуют трехмерный символ Кронекера

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}=\delta^{\alpha}_{\beta},$$

то из тензорного закона преобразования компонент метрического тензора

$$\gamma'^{np}(x')=\frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{l}}\frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{m}}\gamma^{lm}(x(x'))$$

следует, что условие форминвариантности метрики выполняется:

$$\gamma'^{np}(x')=\gamma^{np}(x').$$

Легко также убедиться в том, что метрика (20.2) форминвариантна и при преобразовании поворота вокруг оси x:

$$y'=y\cos\alpha-z\sin\alpha;$$
$$z'=y\sin\alpha+z\cos\alpha.$$

Рассмотрим теперь преобразования координат, соответствующие переходу между различными неинерциальными системами отсчета и оставляющие метрику (20.2) форминвариантной. Для простоты сначала рассмотрим случай, соответствующий относительному движению неинерциальных систем отсчета вдоль оси x.

В силу симметрии задачи искомые преобразования координат запишем в виде

$$t_{\text{с}}=\Psi(t_{\text{н}},\ x_{\text{н}});$$
$$x_{\text{с}}=cf(t_{\text{н}},\ x_{\text{н}}); \qquad (20.3)$$
$$y_{\text{с}}=y_{\text{н}},\quad z_{\text{с}}=z_{\text{н}}.$$

При преобразовании координат метрический тензор пространства-времени преобразуется по закону

$$\gamma^{\text{н}}_{ik}(x_{\text{н}})=\frac{\partial x^{l}_{\text{с}}}{\partial x^{i}_{\text{н}}}\frac{\partial x^{m}_{\text{с}}}{\partial x^{k}_{\text{н}}}\gamma^{\text{с}}_{ml}(x_{\text{с}}(x_{\text{н}})), \qquad (20.4)$$

где $\gamma^{\text{н}}_{ik}(x_{\text{н}})$ и $\gamma^{\text{с}}_{ml}(x_{\text{с}})$ означают соответственно новую и старую функциональные формы метрического тензора. Условие форминвариантности метрики требует того, чтобы функциональная форма метрического тензора при преобразованиях координат не менялась:

$$\gamma_{ik}^{\text{н}}(x_{\text{н}}) = \gamma_{ik}^{\text{c}}(x_{\text{н}}). \tag{20.5}$$

В рассматриваемом случае условие (20.5) требует, чтобы метрический тензор имел вид

$$\begin{aligned}
&\gamma_{00}^{\text{н}} = \frac{1}{1+\frac{w^2 t_{\text{н}}^2}{c^2}}; \quad \gamma_{01}^{\text{н}} = -\frac{w t_{\text{н}}}{c\sqrt{1+\frac{w^2 t_{\text{н}}^2}{c^2}}};\\
&\gamma_{00}^{\text{c}} = \frac{1}{1+\frac{w^2\Psi^2}{c^2}}; \quad \gamma_{01}^{\text{c}} = -\frac{w\Psi}{c\sqrt{1+\frac{w^2\Psi^2}{c^2}}};\\
&\gamma_{11}^{\text{c}} = \gamma_{11}^{\text{н}} = -1; \quad \gamma_{22}^{\text{н}} = \gamma_{22}^{\text{c}} = -1;\\
&\gamma_{33}^{\text{н}} = \gamma_{33}^{\text{c}} = -1.
\end{aligned} \tag{20.6}$$

В силу тензорного характера преобразований метрического тензора (20.4) условие форминвариантности (20.5) при преобразовании (20.3) можно записать в другом виде:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{00}^{\text{н}} = \Psi_t^2\gamma_{00}^{\text{c}} + 2\Psi_t f_t \gamma_{01}^{\text{c}} - f_t^2;\\
&\gamma_{01}^{\text{н}} = c\Psi_t\Psi_x\gamma_{00}^{\text{c}} + c\gamma_{01}^{\text{c}}[\Psi_t f_x + \Psi_x f_t] - c f_t f_x;\\
&-1 = \Psi_x^2\gamma_{00}^{\text{c}}c^2 + 2\Psi_x f_x \gamma_{01}^{\text{c}} c^2 - f_x^2 c^2,
\end{aligned} \tag{20.7}$$

где введены обозначения

$$\Psi_t = \frac{\partial\Psi}{\partial t}; \quad \Psi_x = \frac{\partial\Psi}{\partial x}; \quad f_t = \frac{\partial f}{\partial t}; \quad f_x = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Из первого и последнего уравнений системы нелинейных уравнений в частных производных (20.7) имеем

$$\begin{aligned}
&f_t = \Psi_t\gamma_{01}^{\text{c}} + a\sqrt{\Psi_t^2[(\gamma_{01}^{\text{c}})^2 + \gamma_{00}^{\text{c}}] - \gamma_{00}^{\text{н}}};\\
&f_x = \Psi_x\gamma_{01}^{\text{c}} + b\sqrt{\Psi_x^2[(\gamma_{01}^{\text{c}})^2 + \gamma_{00}^{\text{c}}] + \frac{1}{c^2}},
\end{aligned} \tag{20.8}$$

где a и b являются знаковыми функциями:

$$a = \pm 1; \quad b = \pm 1.$$

Подставляя соотношения (20.8) во второе уравнение системы (20.7), получим

$$[\Psi_t^2 + 2c\gamma_{01}^{\text{н}}\Psi_t\Psi_x - \gamma_{00}^{\text{н}}c^2\Psi_x^2][(\gamma_{01}^{\text{c}})^2 + \gamma_{00}^{\text{c}}] - \gamma_{00}^{\text{н}} - (\gamma_{01}^{\text{н}})^2 = 0. \tag{20.9}$$

Учитывая выражения (20.6), уравнение (20.9) запишем в виде

$$\Psi_t^2-\frac{c^2\Psi_x^2}{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}-\frac{2wt\Psi_t\Psi_x}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}-1=0. \qquad (20.10)$$

Таким образом, систему нелинейных уравнений (20.7) мы свели к одному нелинейному уравнению в частных производных (20.10), решив которое, легко получить и решения уравнений (20.8).

Согласно общей теории нелинейных уравнений в частных производных первого порядка (метод Лагранжа — Шарпи), уравнение (20.10) имеет следующую характеристическую систему ($P_1=\Psi_t$, $P_2=\Psi_x$):

$$\frac{dt}{2\left[P_1-\frac{wtP_2}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}\right]}=-\frac{dx}{2\left[\frac{P_2c^2}{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}+\frac{wtP_1}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}\right]}=$$

$$=\frac{d\Psi}{2}=\frac{dP_1}{\frac{2wP_2}{\left[1+\frac{w^2t^2}{c^2}\right]^{3/2}}\left[P_1-\frac{wtP_2}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}\right]}=\frac{dP_2}{0}. \qquad (20.11)$$

Комбинируя последний член с первыми двумя, получим

$$P_2=\frac{\Phi_0}{c};\quad \Phi_0=\mathrm{const}. \qquad (20.12)$$

Разделив предпоследний член характеристической системы (20.11) на первый и учитывая выражение (20.12), приходим к уравнению

$$\frac{dP_1}{dt}=\frac{w\Phi_0}{c}\left[1+\frac{w^2t^2}{c^2}\right]^{-3/2}.$$

Интегрируя это обыкновенное дифференциальное уравнение, имеем

$$P_1=\Phi_1+\frac{\Phi_0wt}{c\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}};\quad \Phi_1=\mathrm{const}. \qquad (20.13)$$

Таким образом, из соотношений (20.12) и (20.13) следует, что

$$\Psi_t = \Phi_1 + \frac{\Phi_0 wt}{c\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}; \quad \Psi_x = \frac{\Phi_0}{c}. \tag{20.14}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (20.10), найдем соотношение между постоянными Φ_0 и Φ_1

$$\Phi_1^2 = 1 + \Phi_0^2. \tag{20.15}$$

Интегрируя систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных (20.14), получим

$$\Psi = \frac{\Phi_0}{c} x + \Phi_1 t + \frac{c}{w}\Phi_0 \sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}} + \tilde{\Psi}_0; \qquad \tilde{\Psi}_0 = \mathrm{const}. \tag{20.16}$$

Подставляя выражения (20.14) в уравнения (20.8), имеем

$$f_t = -\frac{c}{w}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1+\frac{w^2\Psi^2}{c^2}} + a\left[\Phi_0 + \frac{\Phi_1 wt}{c\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}\right];$$

$$f_x = -\frac{c}{w}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1+\frac{w^2\Psi^2}{c^2}} + \frac{b\Phi_1}{c}.$$

Интегрируя эту систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных, найдем функцию f:

$$f = -\frac{c}{w}\sqrt{1+\frac{\omega^2\Psi^2}{c^2}} + b\Phi_1\frac{x}{c} + a\Phi_0 t + \frac{c}{w}\Phi_1\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}} + \tilde{f}_0.$$

Таким образом, преобразования координат, оставляющие метрику (20.2) форминвариантной, имеют вид

$$\begin{aligned} t_с &= \frac{\Phi_0}{c} x_н + \Phi_1 t_н + \frac{c}{w}\Phi_0\sqrt{1+\frac{w^2t_н^2}{c^2}} + \tilde{\Psi}_0; \\ x_с &= b\Phi_1 x_н + ca\Phi_0 t_н + \frac{c^2\Phi_1}{w}\sqrt{1+\frac{w^2t_н^2}{c^2}} - \\ &- \frac{c^2}{w}\sqrt{1+\frac{w^2}{c^2}\left[\frac{\Phi_0}{c}x_н + \Phi_1 t_н + \frac{c}{w}\Phi_0\sqrt{1+\frac{w^2t_н^2}{c^2}} + \tilde{\Psi}_0\right]^2} + \\ &+ \tilde{f}_0 c. \end{aligned} \tag{20.17}$$

Чтобы эти преобразования имели смысл и при $w=0$, необходимо переопределить постоянные интегрирования

$$\tilde{\Psi}_0=\Psi_0-\frac{c}{w}\Phi_0; \quad \tilde{f}_0=\frac{1}{c} f_0-\frac{c}{w}\Phi_1+\frac{c}{w}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
t_c &= \frac{\Phi_0}{c} x_н + \Phi_1 t_н + \frac{c}{w}\Phi_0\left[\sqrt{1+\frac{w^2 t_н^2}{c^2}}-1\right]+\Psi_0;\\
x_c &= b\Phi_1 x_н + ca\Phi_0 t_н + \frac{c^2}{w}\Phi_1\left[\sqrt{1+\frac{w^2 t_н^2}{c^2}}-1\right]-\\
&-\frac{c^2}{w}\left[\left\{1+\frac{w^2}{c^2}\left[\frac{\Phi_0}{c}x_н+\Phi_1 t_н+\frac{c}{w}\Phi_0\left(\sqrt{1+\frac{w^2 t_н^2}{c^2}}-1\right)+\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.+\Psi_0\right]^2\right\}^{1/2}-1\right]+f_0,
\end{aligned} \tag{20.18}$$

где $\Phi_1^2=1+\Phi_0^2$. Эти преобразования содержат три произвольных параметра Φ_0, Ψ_0, f_0 (параметр w в выражениях (20.18) задается метрикой пространства-времени (20.2) и не является поэтому произвольным параметром преобразования) и две знаковые функции $a=\pm 1$, $b=\pm 1$. Вполне очевидно, что знаковые функции описывают операции инверсии координат x и t. Ввиду того, что нас в дальнейшем будет интересовать лишь собственная группа без инверсии, то положим $a=b=1$.

Таким образом, преобразования (20.18) составляют трехпараметрическую группу преобразований координат, оставляющих метрику (20.2) форминвариантной. Выясним смысл параметров группы. Параметр f_0 описывает уже рассмотренную нами трансляцию координаты x. Легко убедиться, что параметр Ψ_0 описывает преобразование трансляции времени.

Действительно, положив $\Phi_1=1$, $\Phi_0=0$, получим

$$\begin{aligned}
t_c &= t_н+\Psi_0;\\
x_c &= x_н+\frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1+\frac{w^2 t_н^2}{c^2}}-1\right]-\\
&\qquad -\frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1+\frac{w^2 (t_н+\Psi_0)^2}{c^2}}-1\right]+f_0.
\end{aligned}$$

Таким образом, в отличие от группы Пуанкаре, в релятивистски равноускоренной системе отсчета трансляция по времени требует изменения и координат для обеспечения форминвариантности.

Параметр Φ_0 описывает движение одной неинерциальной системы отсчета относительно другой. И чтобы получить выражение для этого параметра через физическую скорость V движения одной неинерциальной системы отсчета относительно другой, воспользуемся следующим обстоятельством: в бесконечно малой окрестности начального момента времени обеих систем отсчета, т. е. при выполнении условий

$$\frac{w^2 t_{\text{с}}^2}{c^2} = \frac{w^2}{c^2}\left[\frac{\Phi_0}{c} x_{\text{н}} + \Phi_1 t_{\text{н}} + \frac{c}{w}\Phi_0\left(\sqrt{1+\frac{w^2 t_{\text{н}}^2}{c^2}} - 1\right)\right]^2 \ll 1; \tag{20.19}$$

$$\frac{w^2 t_{\text{н}}^2}{c^2} \ll 1; \quad \Psi_0 = f_0 = 0$$

преобразования (20.18) должны являться преобразованиями Лоренца между мгновенно сопутствующими инерциальными системами отсчета.

Учитывая оценки (20.19) из выражения (20.18), в этом случае получим

$$t_{\text{с}} = \frac{\Phi_0}{c} x_{\text{н}} + \Phi_1 t_{\text{н}}; \quad x_{\text{с}} = \Phi_1 x_{\text{н}} + c\Phi_0 t_{\text{н}}.$$

Отсюда имеем

$$\Phi_0 = \frac{V}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad \Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

что находится в полном согласии с соотношением (20.15).

Таким образом, преобразования координат, оставляющие метрику (20.2) форминвариантной и описывающие переход между релятивистски равноускоренными системами отсчета, имеют вид

$$t_{\text{с}} = \frac{t_{\text{н}} + \dfrac{V x_{\text{н}}}{c^2} + \dfrac{V}{w}\left(\sqrt{1+\dfrac{w^2 t_{\text{н}}^2}{c^2}} - 1\right)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} + \Psi_0';$$

$$x_{\text{с}} = \frac{x_{\text{н}} + V t_{\text{н}} + \dfrac{c^2}{w}\left(\sqrt{1+\dfrac{w^2 t_{\text{н}}^2}{c^2}} - 1\right)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} -$$

$$- \frac{c^2}{w}\left[\left\{1 + \frac{w^2}{c^2 - V^2}\left[t_{\text{н}} + \frac{V x_{\text{н}}}{c^2} + \frac{V}{w}\left(\sqrt{1+\frac{w^2 t_{\text{н}}^2}{c^2}} - 1\right) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \Psi_0' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right]^2\right\}^{1/2} - 1\right] + f_0. \tag{20.20}$$

Обратные преобразования имеют вид

$$t_{\text{н}}=\frac{t_{\text{c}}-\frac{Vx_{\text{c}}}{c^2}-\frac{V}{w}\left(\sqrt{1+\frac{w^2t_{\text{c}}^2}{c^2}}-1\right)-\Psi_0+\frac{Vf_0}{c^2}}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$x_{\text{н}}=\frac{x_{\text{c}}-Vt_{\text{c}}+\frac{c^2}{w}\left(\sqrt{1+\frac{w^2t_{\text{c}}^2}{c^2}}-1\right)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-$$

$$-\frac{c^2}{w}\left[\left\{1+\frac{w^2}{c^2-V^2}\left[t_{\text{c}}-\frac{Vx_{\text{c}}}{c^2}-\frac{V}{w}\left(\sqrt{1+\frac{w^2t_{\text{c}}^2}{c^2}}-1\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\Psi_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right]^2\right\}^{1/2}-1\right]-\frac{f_0-V\Psi_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (20.21)$$

Таким образом, в данном случае при $\Psi_0=0$; $f_0=0$, как и в случае преобразований Лоренца, выражения для прямого и обратного преобразований могут быть получены друг из друга изменением знака относительной скорости $V\longrightarrow -V$ и заменой $t_{\text{н}}\leftrightarrow t_{\text{c}}$, $x_{\text{н}}\leftrightarrow x_{\text{c}}$.

Для второго случая формулы преобразования от инерциальной к релятивистски равноускоренной системе отсчета имеют вид

$$x=X-\frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1+\frac{w^2T^2}{c^2}}-1\right];$$

$$t=\frac{c}{w}\operatorname{Ar}\operatorname{sh}\frac{wT}{c}. \quad (20.22)$$

Метрика в релятивистски равноускоренной системе отсчета, определенной преобразованиями (20.22), имеет вид

$$ds^2=c^2\,dt^2-2\operatorname{sh}\frac{wt}{c}\,dx\,c\,dt-dx^2-dy^2-dz^2. \quad (20.23)$$

Найдем преобразования координат вида (20.3), оставляющие метрику (20.23) форминвариантной. В рассматриваемом случае ненулевые компоненты метрического тензора пространства-времени в старой и новой координатных системах должны иметь вид

$$\gamma_{01}^{\text{н}}=-\operatorname{sh}\frac{wt}{c};\quad \gamma_{01}^{\text{c}}=-\operatorname{sh}\frac{w\Psi}{c};\quad \gamma_{11}^{\text{н}}=\gamma_{22}^{\text{н}}=\gamma_{33}^{\text{н}}=-1;$$

$$\gamma_{11}^{\text{c}}=\gamma_{22}^{\text{c}}=\gamma_{33}^{\text{c}}=-1;\quad \gamma_{00}^{\text{н}}=1;\quad \gamma_{00}^{\text{c}}=1.$$

Поэтому условия форминвариантности (20.7) метрики (20.23) при преобразовании координат вида (20.3) будут выполнены, если функции f и Ψ удовлетворяют уравнениям

$$\left[\Psi_t^2-c^2\Psi_x^2-2c\Psi_x\Psi_t\operatorname{sh}\frac{wt}{c}\right]\operatorname{ch}^2\frac{w\Psi}{c}-\operatorname{ch}^2\frac{wt}{c}=0;$$
$$f_t=-\frac{c}{w}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{ch}\frac{w\Psi}{c}+\sqrt{\Psi_t^2\operatorname{ch}^2\frac{w\Psi}{c}-1}; \qquad (20.24)$$
$$f_x=-\frac{c}{w}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{ch}\frac{w\Psi}{c}+b\sqrt{\Psi_x^2\operatorname{ch}^2\frac{w\Psi}{c}+\frac{1}{c^2}}.$$

Для решения этих уравнений применим подстановку:

$$\Psi=\frac{c}{w}\operatorname{Ar}\operatorname{sh}\frac{wu}{c}; \qquad (20.25)$$
$$t=\frac{c}{w}\operatorname{Ar}\operatorname{sh}\frac{w\tau}{c}=\frac{c}{w}\operatorname{Arch}\sqrt{1+\frac{w^2\tau^2}{c^2}}.$$

Тогда уравнения (20.24) примут вид

$$u_\tau^2-\frac{c^2u_x^2}{1+\frac{w^2\tau^2}{c^2}}-2u_\tau u_x\frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\frac{w^2\tau^2}{c^2}}}-1=0;$$
$$f_\tau=-\frac{c}{w}\frac{\partial}{\partial\tau}\sqrt{1+\frac{w^2u^2}{c^2}}+a\sqrt{u_\tau^2-\frac{1}{1+\frac{w^2\tau^2}{c^2}}}, \qquad (20.26)$$
$$f_x=-\frac{c}{w}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1+\frac{w^2u^2}{c^2}}+b\sqrt{u_x^2+\frac{1}{c^2}}.$$

Таким образом, уравнения (20.24) подстановкой (20.25) сводятся к уравнениям, рассмотренным в предыдущем случае. Это позволяет нам сразу же записать искомые преобразования:

$$t_{\text{с}}=\frac{c}{w}\operatorname{Ar}\operatorname{sh}\frac{w}{c}\left[\frac{\frac{c}{w}\operatorname{sh}\frac{wt_{\text{н}}}{c}+\frac{Vx_{\text{н}}}{c^2}+\frac{V}{w}\left(\operatorname{ch}\frac{wt_{\text{н}}}{c}-1\right)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right]+\Psi_0;$$
$$x_{\text{с}}=\frac{x_{\text{н}}+\frac{cV}{w}\operatorname{sh}\frac{wt_{\text{н}}}{c}+\frac{c^2}{w}\left(\operatorname{ch}\frac{wt_{\text{н}}}{c}-1\right)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-$$
$$-\frac{c^2}{w}\left[\left\{1+\frac{w^2}{c^2-V^2}\left[\frac{c}{w}\operatorname{sh}\frac{wt_{\text{н}}}{c}+\frac{Vx_{\text{н}}}{c^2}+\frac{V}{w}\left(\operatorname{ch}\frac{wt_{\text{н}}}{c}-1\right)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\Psi_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right]^2\right\}^{1/2}-1\right]+f_0. \qquad (20.27)$$

Обратные преобразования имеют вид

$$t_{\text{н}}=\frac{c}{w}\operatorname{Ar\,sh}\frac{w}{c}\left[\frac{\frac{c}{w}\operatorname{sh}\frac{wt_{\text{c}}}{c}-\frac{Vx_{\text{c}}}{c^2}-\frac{V}{w}\left(\operatorname{ch}\frac{wt_{\text{c}}}{c}-1\right)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-\frac{\Psi_0-\frac{Vf_0}{c^2}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right];$$

$$x_{\text{н}}=\frac{x_{\text{c}}-\frac{cV}{w}\operatorname{sh}\frac{wt_{\text{c}}}{c}+\frac{c^2}{w}\left(\operatorname{ch}\frac{wt_{\text{c}}}{c}-1\right)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-$$

$$-\frac{c^2}{w}\left[\left\{1+\frac{w^2}{c^2-V^2}\left[\frac{c}{w}\operatorname{sh}\frac{wt_{\text{c}}}{c}-\frac{Vx_{\text{c}}}{c^2}-\frac{V}{w}\left(\operatorname{ch}\frac{wt_{\text{c}}}{c}-1\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\Psi_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right]^2\right\}^{1/2}-1\right]-\frac{f_0-V\Psi_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Следует отметить, что в пространстве-времени как с метрикой (20.2), так и с метрикой (20.23), синхронизацию часов осуществить нельзя.

Покажем это на примере метрики (20.23). Интервал собственного времени в этом случае имеет вид

$$\tilde{d}\tau=dt-\frac{dx}{c}\operatorname{sh}\frac{wt}{c}. \tag{20.28}$$

Легко убедиться, что это выражение не является полным дифференциалом. Действительно, необходимым и достаточным условием того, чтобы выражение (20.28) было полным дифференциалом, является уравнение

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x\,\partial t}=\frac{\partial^2\tau}{\partial t\,\partial x}, \tag{20.29}$$

гарантирующее независимость смешанных частных производных от порядка дифференцирования.

В нашем случае, если бы выражение (20.28) являлось полным дифференциалом, частные производные первого порядка имели бы вид

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}=1;\quad \frac{\partial\tau}{\partial x}=-\frac{1}{c}\operatorname{sh}\frac{wt}{c}.$$

Дифференцируя первое из этих равенств по x, а второе по t, получим

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x\,\partial t}=0;\quad \frac{\partial^2\tau}{\partial t\,\partial x}=-\frac{w}{c^2}\operatorname{ch}\frac{wt}{c}.$$

Отсюда следует, что условие (20.29) не выполняется.

Поскольку выражение (20.28) не является полным дифференциалом, то интегралы вида

$$\tau = \int\limits_A^B \tilde{d}\tau$$

не будут однозначными функциями точек A и B, а будут зависеть также от формы пути интегрирования и от закона движения частицы по этому пути. Интеграл по замкнутому контуру также будет зависеть от пути интегрирования. Именно поэтому синхронизацию часов в рассматриваемом случае осуществить нельзя.

Таким образом, мы рассмотрели релятивистски равноускоренную систему отсчета, а затем поставили вопрос о наличии других ускоренных систем отсчета, квадратичная форма для которых форминвариантна квадратичной форме (20.2) исходной системы отсчета. Тогда во всех этих системах отсчета все уравнения физики будут форминвариантны, и все физические процессы в них будут протекать одинаковым образом, обеспечивая выполнение обобщенного принципа относительности. Как мы видели, таких систем отсчета оказалось бесконечно много. Ясно также, что эти преобразования образуют группу: если каждое преобразование не изменяет вида метрики, то и два последовательных преобразования (их сумма) также не будут изменять ее. Среди всех преобразований имеется обратное и тождественное (единичное).

Поэтому-то мы и можем сформулировать обобщенный принцип относительности: для любой неинерциальной системы отсчета можно указать бесконечный набор других неинерциальных систем отсчета, в которых метрика имеет одну и ту же функциональную форму, в результате чего все уравнения физики в этих системах отсчета форминвариантны, а поэтому никакими физическими экспериментами нельзя определить, в какой из таких ускоренных систем отсчета мы находимся. Таким образом, встав на точку зрения, что единое пространство-время обладает псевдоевклидовой геометрией, и рассмотрев с этой точки зрения системы координат, мы смогли по-новому взглянуть уже и на принцип относительности, а главное — существенно расширить область применения специальной теории относительности.