§ 21. Парадокс часов

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета, движущиеся относительно друг друга со скоростью V. Назовем условно одну из этих систем отсчета покоящейся, а другую — движущейся. Пусть в каждой из них имеются абсолютно идентичные часы. Измерим с их помощью промежуток времени между какими-либо двумя событиями, происходящими в одной и той же точке движущейся системы отсчета. Тогда, как следует из выражения (4.1), часы покоящейся системы отсчета покажут бо́льшую величину промежутка, чем часы, находящиеся в движущейся системе отсчета. Этот эффект нашел свое экспериментальное подтверждение (одним из таких подтверждений является возрастание времени жизни движущихся μ-мезонов по сравнению с временем жизни μ-мезонов, покоящихся относительно наблюдателя) и в настоящее время не вызывает сомнения. Однако в силу равноправия всех инерциальных систем отсчета он обратим, поскольку часы, движущиеся в первоначальной системе отсчета, после перехода в сопутствующую инерциальную систему окажутся в ней покоящимися, а покоящиеся — движущимися.

Пусть в момент $t=0$ начала координат двух инерциальных систем отсчета совпадают. Если два наблюдателя, находящиеся в этих системах отсчета, в начале координат сверили свои часы в момент $t=0$, а затем разошлись, и по прошествии некоторого промежутка времени они вновь встретились в одной точке пространства, то что́ покажут их часы? Ответ на этот вопрос и является решением так называемого «парадокса часов».

Однако два наблюдателя, находящиеся в различных инерциальных системах отсчета, сверив свои часы в одной и той же точке пространства, в дальнейшем уже не смогут встретиться в какой-либо другой точке пространства, так как для этого по крайней мере одному из них пришлось бы прервать свое инерциальное движение и перейти на какое-то время в неинерциальную систему отсчета. А так как при этом нарушится равноправие часов, то вполне естественно, что при встрече часы, двигавшиеся неинерциально, будут отставать от часов, которые все время находились в инерциальной системе отсчета.

В научной литературе (см., например, [8, 11, 14, 18, 19, 64]) часто можно встретить утверждения, что влияние гравитационного поля и поля сил инерции на ход всех физических процессов одинаково, в результате чего переход к неинерциальной системе отсчета эквивалентен появлению в ней гравитационного поля. Поэтому и описание всех явлений, происходящих в неинерциальных системах отсчета (в том числе и решение парадокса часов), якобы возможно только с позиции общей теории относительности. Однако эти утверждения неправильны. Силы инерции и силы гравитации являются совершенно разными по своей природе, поскольку тензор кривизны для первых тождественно равен нулю, а для вторых — отличен от нуля. Следовательно, влияние первых на все физические процессы можно полностью устранить во всем пространстве (глобально) переходом к инерциальной системе отсчета, в то время как влияние вторых может быть устранено лишь в локальных областях пространства и не для всех физических процессов, а лишь для простейших, в уравнения которых не входит кривизна пространства-времени. Поэтому-то и описание всех физических явлений, происходящих в неинерциальных системах отсчета, полностью относится к специальной теории относительности и не требует перехода к общей теории относительности.

Это, в частности, означает, что и решение парадокса часов можно дать, оставаясь все время в рамках специальной теории относительности.

Проиллюстрируем это утверждение конкретным расчетом. Предположим, что у нас имеются двое идентичных часов, находящихся в одной и той же точке инерциальной системы отсчета. Их показания в начальный момент $t=0$ будем считать совпадающими. Пусть одни из этих часов все время покоятся в первоначальной точке и тем самым являются инерциальными. Другие часы под действием приложенной силы начинают в момент времени $t=0$ релятивистски равноускоренно двигаться с ускорением $a=w>0$ и движутся так до момента $t=T_1$ по покоящимся часам. Далее действие силы на вторые часы прекращается, и они в течение временного промежутка $T_1 < t < T_1+T_2$ движутся равномерно. После этого к ним прикладывается тормозящая сила, под действием которой они начинают релятивистски равноускоренно двигаться с ускорением $a = -w$ и движутся так до момента $t = 2T_1 + T_2$, в результате чего их скорость относительно первых часов становится равной нулю. Затем весь цикл повторяется в обратном порядке, и вторые часы прибывают в ту точку, в которой находятся первые часы.

Вычислим разность показаний этих часов в инерциальной системе отсчета, в которой покоятся первые часы. В силу симметрии задачи (четыре участка ускоренного движения и два — равномерного) показание покоящихся часов к моменту их встречи со вторыми будет равно

$$T = 4T_1 + 2T_2. \tag{21.1}$$

Для вторых часов аналогично

$$T' = 4T_1' + 2T_2',$$

где T_1' — величина промежутка времени от начала ускорения часов до его прекращения, измеренная движущимися часами, T_2' — величина промежутка собственного времени вторых часов, в течение которого они двигались равномерно между первым и вторым ускорениями.

Поскольку ускоренное движение вторых часов можно представить как непрерывный переход от одной мгновенно сопутствующей инерциальной системы отсчета к другой, то в силу соотношения (4.1) для определения величины T_1' имеем выражение

$$T_1' = \int_0^{T_1} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt. \tag{21.2}$$

В результате того, что на первом этапе движение вторых часов является релятивистски равноускоренным без начальной скорости, то из выражения (19.12) при $0 \leqslant t \leqslant T_1$ имеем

$$\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} = \left[1 + \frac{w^2 t^2}{c^2}\right]^{-1/2}.$$

Тогда соотношение (21.2) дает

$$T_1' = \frac{c}{w} \ln\left(\frac{wT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{w^2 T_1^2}{c^2}}\right).$$

Поскольку при $T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + T_2$ движение вторых часов равномерное со скоростью

$$V = \frac{wT_1}{\sqrt{1 + \frac{w^2T_1^2}{c^2}}},$$

то из выражения (21.2) получим

$$T_2' = \frac{T_2}{\sqrt{1 + \frac{w^2T_1^2}{c^2}}}.$$

Следовательно, к моменту встречи показание вторых часов будет

$$T' = \frac{4c}{w} \ln\left(\frac{wT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{w^2T_1^2}{c^2}}\right) + \frac{2T_2}{\sqrt{1 + \frac{w^2T_1^2}{c^2}}}. \quad (21.3)$$

Вычитая выражение (21.1) из (21.3), найдем разность $\Delta T = T' - T$ показаний часов в момент их встречи:

$$\Delta T = T' - T = \frac{4c}{w} \ln\left[\frac{wT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{w^2T_1^2}{c^2}}\right] - 4T_1 + 2T_2\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{w^2T_1^2}{c^2}}} - 1\right]. \quad (21.4)$$

Легко убедиться, что при любых $w > 0$, $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ величина ΔT будет отрицательной. Это означает, что в момент встречи показание вторых часов будет меньше показаний первых. Рассмотрим теперь тот же процесс в системе отсчета, в которой вторые часы все время покоятся. Эта система отсчета не является инерциальной, так как вторые часы часть времени движутся неравномерно относительно инерциальной системы отсчета, связанной с первыми часами, а оставшуюся часть времени они движутся равномерно. На первом этапе движение вторых часов является релятивистски равноускоренным, происходящим по закону

$$x_0 = \frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1 + \frac{w^2t^2}{c^2}} - 1\right].$$

Как следует из выражения (20.1), координаты (x, t) второго наблюдателя на этом участке пути связаны с координатами (X, T) первого (инерциального) наблюдателя соотношением

$$x = X - x_0 = X - \frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1 + \frac{w^2T^2}{c^2}} - 1\right]. \qquad (21.5)$$

Поэтому на данном отрезке пути метрика неинерциальной системы отсчета, связанной со вторыми часами, будет иметь вид

$$ds^2 = \frac{c^2\,dt^2}{1 + \frac{w^2t^2}{c^2}} - \frac{2wt\,dx\,dt}{\sqrt{1 + \frac{w^2t^2}{c^2}}} - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad (21.6)$$

В этой системе отсчета вторые часы все время покоятся в точке $x = 0$, а первые движутся по геодезической

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{ml}u^m u^l = 0. \qquad (21.7)$$

Определим закон их движения. Используя соотношение $g_{ni}g^{nl} = \delta^l_i$, имеем

$$g^{00} = 1; \quad g^{01} = -\frac{wt}{c\sqrt{1 + \frac{w^2t^2}{c^2}}}; \qquad (21.8)$$
$$g^{11} = -\left[1 + \frac{w^2t^2}{c^2}\right]^{-1}.$$

Из выражений (21.6) и (21.8) следует, что единственная неравная нулю компонента символов Кристоффеля имеет вид

$$\Gamma^1_{00} = \frac{w}{c^2\left[1 + \frac{w^2t^2}{c^2}\right]^{3/2}}.$$

Поэтому уравнения движения (21.7) первых часов принимают вид

$$\frac{du^0}{ds} = 0; \quad \frac{du^1}{ds} + \Gamma^1_{00}u^0u^0 = 0. \qquad (21.9)$$

Так как $u^1 = (u^0/c)\,dx/dt$, то, используя первое из уравнений (21.9), а также соотношение $d/ds = (u^0/c)\,d/dt$, второе уравнение системы (21.9) приведем к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c^2\Gamma^1_{00} = 0.$$

Подставляя сюда явное выражение для Γ^1_{00}, имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{w}{\left[1+\frac{w^2t^2}{c^2}\right]^{3/2}}=0.$$

Решая это обыкновенное дифференциальное уравнение с начальными условиями $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$, получим закон движения первых часов:

$$x=\frac{c^2}{w}\left[1-\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}\right]. \tag{21.10}$$

Таким образом, мы имеем все необходимое для определения показания обоих часов к моменту окончания первого этапа в их движении. Собственное время $d\tau$ первых часов на данном этапе движения связано с координатным временем t соотношением

$$d\tau=\frac{1}{c}\,ds=dt\left[g_{00}+\frac{2}{c}\,g_{01}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Подставляя в это соотношение выражения (21.6) и (21.10), получим

$$d\tau=dt.$$

Таким образом, на первом этапе пути собственное время первых часов совпадает с координатным временем, поэтому, используя вторую из формул (21.5), найдем, что к концу данного этапа пути показание первых часов τ_1 будет равно $\tau_1=T_1$. Поскольку вторые часы покоятся относительно неинерциальной системы отсчета, то их собственное время можно определить из выражения

$$d\tau'=\sqrt{g_{00}}\,dt.$$

Так как первый этап пути занимает промежуток $0<t\leqslant T_1$ координатного времени, то в конце данного этапа показание τ_1' вторых часов будет равно

$$\tau_1'=\int\limits_0^{T_1}\sqrt{g_{00}}\,dt=\int\limits_0^{T_1}\frac{dt}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}=$$

$$=\frac{c}{w}\ln\left[\frac{wT_1}{c}+\sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}\right]. \tag{21.11}$$

В конце первого этапа пути по достижении скорости

$$v = \frac{wT_1}{\sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}},$$

действие ускоряющей силы на вторые часы прекращается, и они далее продолжают равномерное движение, поэтому закон движения начала отсчета системы, связанной с ними, на втором этапе пути имеет вид

$$x = vt.$$

Так так на данном этапе пути движение обоих часов является равномерным и прямолинейным, то и обе системы отсчета, связанные с ними, будут инерциальными. Поэтому координаты и время в этих системах отсчета, казалось бы, следовало связать преобразованием Лоренца (3.9). Однако в этом случае на втором этапе пути метрика в обеих системах отсчета будет галилеевой

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{21.12}$$

и, следовательно, в момент времени $t = T_1$, метрический тензор в системе отсчета, связанной со вторыми часами, должен скачком измениться от значения

$$g_{00} = \frac{1}{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}} < 1; \quad g_{01} = -\frac{wT_1}{\sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}};$$

$$g_{11} = -1; \quad g_{22} = -1; \quad g_{13} = -1$$

до значения

$$g_{00} = 1; \quad g_{01} = 0; \; g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1.$$

Поскольку метрический тензор пространства-времени должен быть непрерывной величиной, то мы должны согласовывать выбор координат на первом и втором этапах пути. Для этого у нас имеются две возможности. Первая из них является традиционной и состоит в изменении по некоторому закону $t = F(x, t')$ начала отсчета и темпа хода координатных часов в неинерциальной системе отсчета, связанной со вторым наблюдателем так, чтобы метрика этой системы отсчета стала диагональной и пространственные ее компоненты не зависели от времени. Такие системы отсчета в научной литературе называют жесткими. Тогда в жесткой системе отсчета при определенном выборе констант интегрирования можно добиться того, чтобы компонента g_{00} при неинерциальном движении системы отсчета принимала значение $g_{00}=1$ по крайней мере в двух различных наперед заданных моментах времени. Если первый из них считать началом неинерциального движения, а второй — окончанием, то метрика жесткой системы непрерывным образом может переходить в галилееву метрику (21.12) на участках инерциального движения. Однако такой путь является достаточно сложным и, кроме того, заранее не очевидно, что соответствующее преобразование $t=F(x, t')$ может быть найдено для любой неинерциальной системы отсчета.

Поэтому для обеспечения непрерывности метрического тензора при переходе системы отсчета от неинерциального движения к инерциальному, давайте используем новую возможность, открывшуюся в связи с проделанным нами ранее расширением класса инерциальных систем отсчета до класса обобщенных инерциальных систем отсчета. Обобщенные инерциальные системы отсчета, как детально показано в § 12—16, являются полностью равноправными в описании физических явлений с лоренцевыми инерциальными системами отсчета и могут иметь недиагональную метрику. Поэтому потребуем, чтобы при $t=T_1$ метрика неинерциальной системы отсчета, связанной со вторыми часами, непрерывным образом переходила в метрику обобщенной инерциальной системы отсчета. Для этого достаточно на втором этапе пути связать координаты и время второго наблюдателя (X, T) с координатами первого (x, t) соотношениями

$$x=X-x_0(T)=X-VT; \quad t=T,$$

где

$$V=\frac{wT_1}{\sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}}.$$

В этом случае в промежутке координатного времени $T_1 < t < T_1+T_2$ система отсчета, связанная со вторыми часами, имеет метрику

$$ds^2=c^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)dt^2-2V\,dx\,dt-dx^2-dy^2-dz^2. \qquad (21.13)$$

Легко убедиться в том, что при $t=T_1$ метрика (21.6) неинерциальной системы отсчета непрерывным образом переходит в метрику обобщенной инерциальной системы отсчета (21.13). Используя уравнение геодезических (21.7), найдем закон движения первых часов относительно вторых. Так как в системе отсчета с метрикой (21.13) все компоненты $\Gamma^i_{nl}=0$, то, используя начальное условие $-\dot{x}=V$ при $t=T_1$, найдем

$$\frac{dx}{dt}=-V.$$

Поэтому и на втором этапе пути собственное время $d\tau$ первых часов

$$d\tau=\frac{1}{c}\,ds=dt\left[g_{00}+\frac{2}{c}\,g_{01}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]^{1/2}$$

совпадает с координатным временем: $d\tau=dt$.

Поскольку на этом этапе движения координатное время t изменяется в интервале $T_1<t<T_1+T_2$, то по первым часам на него будет затрачено время $\tau_2=T_2$. Вторые же часы покоятся ($dx/dt=0$) относительно выбранной нами системы отсчета, а, следовательно, их собственное время

$$d\tau'=\sqrt{g_{00}}\,dt.$$

Отсюда имеем

$$\tau_2'=\int\limits_{T_1}^{T_1+T_2}\sqrt{g_{00}}\,dt=T_2\sqrt{1-V^2/c^2}=\frac{T_2}{\sqrt{1+\dfrac{w^2T_1^2}{c^2}}}.$$

В силу симметрии задачи полученных данных достаточно, чтобы определить показания часов в момент их встречи после всего цикла движения. Действительно, показание первых часов τ, определяемое в системе отсчета, связанной со вторыми часами, может быть найдено из соотношения

$$\tau=4\tau_1+2\tau_2.$$

Совершенно аналогично, показание вторых часов τ', определяемое в той же системе отсчета, будет

$$\tau'=4\tau_1'+2\tau_2'.$$

Подставляя в эти равенства выражения для τ_1, τ_2, τ_1' и τ_2', получим

$$\tau' = \frac{4c}{w} \ln\left[\frac{wT_1}{c} + \sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}\right] + \frac{2T_2}{\sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}}; \qquad (21.14)$$

$$\tau = 4T_1 + 2T_2.$$

Отсюда следует, что разность показаний часов в момент их встречи $\Delta\tau = \tau' - \tau$, определяемая в системе отсчета, связанной со вторыми часами,

$$\Delta\tau = \frac{4c}{w} \ln\left[\frac{wT_1}{c} + \sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}\right] - 4T_1 + 2T_2\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}} - 1\right]. \qquad (21.15)$$

Сравнивая выражения (21.14) и (21.15) с выражениями (21.1), (21.3) и (21.4), легко убедиться, что расчет в системе отсчета, связанной с первыми часами, дает тот же результат, что и расчет в системе отсчета, связанной со вторыми часами: вторые часы после завершения всего цикла движения и встречи их с первыми окажутся отставшими от них.

Конкретное значение разности показаний часов зависит от w, T_1 и T_2. В частном случае, когда ускорение w стремится к бесконечности, а время ускоренного движения $T_1 \to 0$ так, чтобы скорость вторых часов

$$V = wT_1\left[1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}\right]^{-1/2}$$

после ускорения была конечной величиной, из выражения (21.15) имеем

$$\Delta\tau = 2T_2\left[\sqrt{1-V^2/c^2} - 1\right].$$

Это соотношение показывает, что часы, которые испытывают мгновенные ускорения, а потом движутся сколь угодно долго инерциально, не равноправны с инерциальными часами. Таким образом, мы показали, что как в системе отсчета, связанной с первыми часами, так и в системе отсчета, связанной со вторыми часами, расчет разности показаний этих часов дает один и тот же результат. Это означает, что отставание часов, которые двигались неинерциально, от инерциальных часов является эффектом абсолютным, не зависящим от выбора системы отсчета.

§ 22. Связь между координатными и физическими величинами

Как я уже неоднократно говорил, все физические явления могут быть описаны физически и математически равноправно в произвольных допустимых координатах. Однако при описании физических явлений в произвольных координатах возникают два вида величин: координатные и физические. Мы уже встречались с ними при рассмотрении координатной и физической скоростей в случае произвольной инерциальной системы отсчета.

Для того чтобы понять различие этих двух видов величин и выяснить способ сопоставления физических и координатных величин в произвольной допустимой системе отсчета, рассмотрим простой случай: выясним, как связаны в произвольной инерциальной системе отсчета координатные время и расстояние с физическим временем и расстоянием. Поскольку эти два понятия — время и расстояние — играют в физике фундаментальную роль (так как все физические процессы происходят в пространстве и времени), то установленный в этом случае закон сопоставления координатным величинам физических будет носить не частный, а общий характер, справедливый и для остальных физических величин.

Рассмотрим в произвольной криволинейной системе координат псевдоевклидова пространства-времени величину интервала

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k. \tag{22.1}$$

Эта величина является инвариантом при всех допустимых преобразованиях координат пространства-времени. Выделяя в выражении (22.1) слагаемые, содержащие нулевые индексы, получим

$$ds^2 = c^2 g_{00}\, dt^2 + 2 g_{0\alpha}\, c\, dt\, dx^\alpha + g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta =$$
$$= c^2 \left[\sqrt{g_{00}}\, dt + \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}\right]^2 - \varkappa_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta. \tag{22.2}$$