разности показаний этих часов дает один и тот же результат. Это означает, что отставание часов, которые двигались неинерциально, от инерциальных часов является эффектом абсолютным, не зависящим от выбора системы отсчета.

§ 22. Связь между координатными и физическими величинами

Как я уже неоднократно говорил, все физические явления могут быть описаны физически и математически равноправно в произвольных допустимых координатах. Однако при описании физических явлений в произвольных координатах возникают два вида величин: координатные и физические. Мы уже встречались с ними при рассмотрении координатной и физической скоростей в случае произвольной инерциальной системы отсчета.

Для того чтобы понять различие этих двух видов величин и выяснить способ сопоставления физических и координатных величин в произвольной допустимой системе отсчета, рассмотрим простой случай: выясним, как связаны в произвольной инерциальной системе отсчета координатные время и расстояние с физическим временем и расстоянием. Поскольку эти два понятия — время и расстояние — играют в физике фундаментальную роль (так как все физические процессы происходят в пространстве и времени), то установленный в этом случае закон сопоставления координатным величинам физических будет носить не частный, а общий характер, справедливый и для остальных физических величин.

Рассмотрим в произвольной криволинейной системе координат псевдоевклидова пространства-времени величину интервала

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k. \tag{22.1}$$

Эта величина является инвариантом при всех допустимых преобразованиях координат пространства-времени. Выделяя в выражении (22.1) слагаемые, содержащие нулевые индексы, получим

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 g_{00}\, dt^2 + 2g_{0\alpha}\, c\, dt\, dx^\alpha + g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = \\ &= c^2 \left[\sqrt{g_{00}}\, dt + \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}\right]^2 - \varkappa_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta. \end{aligned} \tag{22.2}$$

где $\varkappa_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + g_{0\alpha}g_{0\beta}/g_{00}$ — трехмерный метрический тензор.

Так как выражение для ds^2 инвариантно при всех допустимых преобразованиях координат, то и разбивка ds^2 на две такие части инвариантна: при всех допустимых преобразованиях координат величина

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt + \frac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}} \tag{22.3}$$

имеет времениподобный характер, а величина

$$dR^2 = \varkappa_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta \tag{22.4}$$

— пространственноподобный. Эти величины являются физическими, поэтому величину (22.3) естественно назвать физическим временем, а величину (22.4)—квадратом физического расстояния. Они непосредственно связаны с интервалом (22.1) соотношением, напоминающим выражение (2.13) для интервала в галилеевых инерциальных системах отсчета

$$ds^2 = c^2\,d\tau^2 - dR^2. \tag{22.5}$$

Следует отметить, что в общем случае выражение (22.3) не является полным дифференциалом. Условие обращения выражения (22.3) в полный дифференциал, как я уже упоминал, тесно связано с возможностью синхронизации часов в данной системе отсчета: синхронизация часов возможна только в тех системах отсчета, в которых величина $d\tau$ является полным дифференциалом.

Системы отсчета, в которых интервал имеет вид

$$ds^2 = c^2\,dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2,$$

дают наиболее простую связь между физически измеримыми величинами $d\tau$ и dR и координатными величинами dT, dX, dY, dZ:

$$d\tau = dT; \quad dR^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2.$$

В других системах отсчета эта связь сложнее.

Таким образом, мы установили, что физически измеримое время $d\tau$ является линейной комбинацией координатного времени dt и координатного дифференциала dx^α, причем коэффициенты этой комбинации построены из компонент метрического тензора. Квадрат физически измеримого расстояния dR^2 является квадратичной формой координатных дифференциалов. Тогда, считая $cd\tau$ нулевой компонентой измеримого дифференциала dX^i, а dR^2 — квадратичной формой из его пространственных компонент, имеем

$$dX^{\bar{i}} = \lambda_l^{\bar{i}} dx^l,$$

где $\lambda_l^{\bar{i}}$ — некоторые базисные векторы, зависящие от метрики. В литературе шестнадцать компонент $\lambda_l^{\bar{i}}$ называют тетрадой.

Ввиду того, что величина интервала в физически измеримых дифференциалах является диагональной, то для определения компонент базисных векторов $\lambda_l^{\bar{i}}$ мы имеем следующее уравнение:

$$ds^2 = \gamma_{\bar{i}\bar{k}}\, dX^{\bar{i}}\, dX^{\bar{k}} = \lambda_l^{\bar{i}} \lambda_m^{\bar{k}} \gamma_{\bar{i}\bar{k}}\, dx^l\, dx^m = g_{lm}\, dx^l\, dx^m.$$

Отсюда получаем связь между метрическим тензором g_{lm} и тетрадой:

$$g_{lm} = \lambda_l^{\bar{i}} \lambda_m^{\bar{k}} \gamma_{\bar{i}\bar{k}}. \tag{22.6}$$

Таким образом, для определения шестнадцати компонент базисных векторов $\lambda_l^{\bar{i}}$ мы имеем только десять уравнений. Как их будем находить? Вспомним, что мы уже установили связь физического времени $d\tau$ с координатными величинами dx^l:

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt + \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}} = \lambda_l^{\bar{0}}\, dx^l.$$

Отсюда мы уже можем определить четыре компоненты $\lambda_l^{\bar{0}}$:

$$\lambda_l^{\bar{0}} = \frac{g_{0l}}{\sqrt{g_{00}}}; \quad l = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{22.7}$$

Подставляя это выражение в уравнения (22.6), получим

$$\begin{gathered} (\lambda_0^{\bar{1}})^2 + (\lambda_0^{\bar{2}})^2 + (\lambda_0^{\bar{3}})^2 = 0; \\ \lambda_0^{\bar{1}} \lambda_\alpha^{\bar{1}} + \lambda_0^{\bar{2}} \lambda_\alpha^{\bar{2}} + \lambda_0^{\bar{3}} \lambda_\alpha^{\bar{3}} = 0; \\ -\varkappa_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha^{\bar{\mu}} \lambda_\beta^{\bar{\nu}} \gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}. \end{gathered} \tag{22.8}$$

Из первого уравнения этой системы имеем

$$\lambda_0^{\bar{1}} = \lambda_0^{\bar{2}} = \lambda_0^{\bar{3}} = 0.$$

Тогда второе уравнение системы (22.8) будет выполняться тождественно.

Таким образом, для определения оставшихся девяти компонент $\lambda_{\beta}^{\bar{\nu}}$ имеем шесть уравнений:

$$-\varkappa_{\alpha\beta}=\lambda_{\alpha}^{\bar{\mu}}\lambda_{\beta}^{\bar{\nu}}\gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}. \tag{22.9}$$

Однако эти уравнения являются уравнениями второй степени относительно неизвестных $\lambda_{\beta}^{\bar{\nu}}$, поэтому подсчет числа уравнений и числа неизвестных еще ничего не говорит о числе их решений. Для определения компонент $\lambda_{\beta}^{\bar{\nu}}$ поступим следующим образом. Рассмотрим покоящийся отрезок, ориентированный вдоль какой-либо оси, скажем оси x. Так как в этом случае $dy=dz=0$, то квадрат его длины dR^2 можно записать в виде

$$\left(dX^{\bar{1}}\right)^2=dR^2=\varkappa_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta}.$$

Учитывая, что $dX^{\bar{1}}=\lambda_1^{\bar{1}}dx$ при $dy=dz=0$, получим

$$\lambda_1^{\bar{1}}=\sqrt{\varkappa_{11}}. \tag{22.10}$$

Ориентируя последовательно измеряемый отрезок вдоль остальных осей, найдем

$$\lambda_2^{\bar{2}}=\sqrt{\varkappa_{22}};\qquad \lambda_3^{\bar{3}}=\sqrt{\varkappa_{33}}. \tag{22.11}$$

Тогда оставшиеся шесть компонент $\lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}}$ будут удовлетворять шести уравнениям:

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1^{\bar{2}})^2+(\lambda_1^{\bar{3}})^2=0;\quad (\lambda_2^{\bar{1}})^2+(\lambda_2^{\bar{3}})^2=0;\\
&(\lambda_3^{\bar{1}})^2+(\lambda_3^{\bar{2}})^2=0;\\
&\lambda_1^{\bar{1}}\lambda_2^{\bar{1}}+\lambda_1^{\bar{2}}\lambda_2^{\bar{2}}+\lambda_1^{\bar{3}}\lambda_2^{\bar{3}}=0;\\
&\lambda_1^{\bar{1}}\lambda_3^{\bar{1}}+\lambda_1^{\bar{2}}\lambda_3^{\bar{2}}+\lambda_1^{\bar{3}}\lambda_3^{\bar{3}}=0;\\
&\lambda_2^{\bar{1}}\lambda_3^{\bar{1}}+\lambda_2^{\bar{2}}\lambda_3^{\bar{2}}+\lambda_2^{\bar{3}}\lambda_3^{\bar{3}}=0.
\end{aligned} \tag{22.12}$$

Из первых трех уравнений этой системы следует, что $\lambda_1^{\bar{2}}=\lambda_1^{\bar{3}}=\lambda_2^{\bar{1}}=\lambda_2^{\bar{3}}=\lambda_3^{\bar{1}}=\lambda_3^{\bar{2}}=0$. Легко убедиться, что и оставшиеся три уравнения системы (22.12) удовлетворяются при этом тождественно. Таким образом, все компоненты $\lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}}$ определены.

Как мы установили, физические время и расстояние, являющиеся локальным 4-вектором, связаны с координанатными дифференциалами dt и dx^α соотношением

$$dX^{\bar{i}} = \lambda^{\bar{i}}_l \, dx^l.$$

Из фундаментальности понятий пространства и времени следует, что эта связь имеет не частный, а общий характер, являясь законом, по которому координатному 4-вектору a^i сопоставляется физический 4-вектор

$$A^{\bar{i}} = \lambda^{\bar{i}}_l a^l. \qquad (22.13)$$

Обобщение этого закона на случай тензора произвольной валентности большого труда не составляет: пусть тензор $q^{lm \dots n}$ является координатным, тогда физически измеримый тензор $Q^{\bar{i}\bar{p} \dots \bar{k}}$ может быть получен по закону

$$Q^{\bar{i}\bar{p} \dots \bar{k}} = \lambda^{\bar{i}}_l \lambda^{\bar{p}}_m \dots \lambda^{\bar{k}}_n q^{lm \dots n}. \qquad (22.14)$$

Для ковариантных физически измеримых величин имеем

$$A_{\bar{i}} = \gamma_{\bar{i}\bar{k}} A^{\bar{k}},$$

т. е. для поднятия и опускания их индексов используется галилеевский метрический тензор $\gamma_{\bar{i}\bar{k}}$.

Поскольку инвариантному 4-объему

$$d\Omega = \sqrt{-g}\, c\, dt\, dx\, dy\, dz$$

сопоставляется физический 4-объем в галилеевых координатах

$$d\Omega = c\, dT\, dX\, dY\, dZ,$$

отсюда следует, что значение определителя метрического тензора $\gamma_{\bar{i}\bar{k}}$ равно единице.

§ 23. Уравнения и соотношения механики в произвольной инерциальной системе отсчета

Запишем теперь в произвольной инерциальной системе отсчета, метрика которой имеет вид (12.11), уравнения механики. Поскольку в этом случае справедливы соотношения

$$\begin{gathered} ds = c\left[g_{00}\left(1 - \frac{v^x}{c_1}\right)\left(1 - \frac{v^x}{c_2}\right) - \frac{(v^y)^2 + (v^z)^2}{c^2}\right]^{1/2} dt; \\ u^0 = \frac{c\,dt}{ds}; \quad u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c} u^0; \quad F^\alpha = f^\alpha \frac{u^0}{c}, \end{gathered} \qquad (23.1)$$