натными дифференциалами dt и dx^α соотношением

$$dX^{\overline{i}} = \lambda^{\overline{i}}_l \, dx^l.$$

Из фундаментальности понятий пространства и времени следует, что эта связь имеет не частный, а общий характер, являясь законом, по которому координатному 4-вектору a^i сопоставляется физический 4-вектор

$$A^{\overline{i}} = \lambda^{\overline{i}}_l a^l. \tag{22.13}$$

Обобщение этого закона на случай тензора произвольной валентности большого труда не составляет: пусть тензор $q^{lm \dots n}$ является координатным, тогда физически измеримый тензор $Q^{\overline{i}\,\overline{p} \dots \overline{k}}$ может быть получен по закону

$$Q^{\overline{i}\,\overline{p} \dots \overline{k}} = \lambda^{\overline{i}}_l \lambda^{\overline{p}}_m \dots \lambda^{\overline{k}}_n q^{lm \dots n}. \tag{22.14}$$

Для ковариантных физически измеримых величин имеем

$$A_{\overline{i}} = \gamma_{\overline{i}\,\overline{k}} A^{\overline{k}},$$

т. е. для поднятия и опускания их индексов используется галилеевский метрический тензор $\gamma_{\overline{i}\,\overline{k}}$.

Поскольку инвариантному 4-объему

$$d\Omega = \sqrt{-g}\, c\, dt\, dx\, dy\, dz$$

сопоставляется физический 4-объем в галилеевых координатах

$$d\Omega = c\, dT\, dX\, dY\, dZ,$$

отсюда следует, что значение определителя метрического тензора $\gamma_{\overline{i}\,\overline{k}}$ равно единице.

§ 23. Уравнения и соотношения механики в произвольной инерциальной системе отсчета

Запишем теперь в произвольной инерциальной системе отсчета, метрика которой имеет вид (12.11), уравнения механики. Поскольку в этом случае справедливы соотношения

$$\begin{gathered} ds = c\left[g_{00}\left(1 - \frac{v^x}{c_1}\right)\left(1 - \frac{v^x}{c_2}\right) - \frac{(v^y)^2 + (v^z)^2}{c^2}\right]^{1/2} dt; \\ u^0 = \frac{c\,dt}{ds}; \quad u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c} u^0; \quad F^\alpha = f^\alpha \frac{u^0}{c}, \end{gathered} \tag{23.1}$$

из общековариантных уравнений (19.2) получим

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{v^\alpha}{\sqrt{g_{00}\left(1-\frac{v^x}{c_1}\right)\left(1-\frac{v^x}{c_2}\right)-\frac{1}{c^2}(v^y)^2-\frac{1}{c^2}(v^z)^2}} = f^\alpha. \quad (23.2)$$

Используя определение 4-импульса материальной точки $p^i = m_0 c u^i$, эти уравнения запишем в виде

$$\frac{d}{dt} P^\alpha = f^\alpha. \quad (23.3)$$

Решая уравнения (23.2) или (23.3), мы можем определить все интересующие нас координатные величины как функции любых других координатных величин $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $v^\alpha(t)$, $p^i(t)$, $p^i(x, y, z)$ и т. п. Мы можем также найти соотношение между координатным временем и физическим временем (собственным временем какого-либо наблюдателя), и после этого выразить все полученные физические величины как функции от физического времени. Таким образом, описание механических явлений в произвольной инерциальной системе отсчета позволяет получить всю интересующую нас информацию о механическом движении.

Покажем, что развитый выше формализм, позволяющий сопоставлять координатным величинам физические величины, приводит к соотношениям, которые полностью согласуются с опытом.

Из опыта мы знаем, что энергия и импульс частицы зависят от ее физической скорости V по закону

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad P^{\overline{\alpha}} = \frac{m_0 V^{\overline{\alpha}}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad (23.4)$$

и эти величины составляют 4-вектор $P^i = (E/c, P^{\overline{\alpha}})$. Решая уравнения (23.3), мы получим координатный 4-вектор импульса частицы, движущейся с координатной скоростью v^α:

$$P^i = m_0 c u^i, \quad (23.5)$$

где

$$u^i = \left(\frac{c\,dt}{ds}, \quad v^\alpha \frac{dt}{ds}\right).$$

Используя определения (22.5), (11.7) и (4.13), получим

$$\frac{c\,d\tau}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-(dR^2)/c^2\,d\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (23.6)$$

Тогда для координатного 4-вектора скорости u^i имеем

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{dt}{d\tau}; \quad u^\alpha = \frac{1}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{dx^\alpha}{d\tau}. \tag{23.7}$$

Энергию и импульс в силу выражений (23.14) и (23.5) можно записать в виде

$$E = cP^{\bar{0}} = m_0c^2u^i\lambda_i^{\bar{0}}; \quad P^{\bar{\alpha}} = m_0cu^i\lambda_i^{\bar{\alpha}}. \tag{23.8}$$

Поскольку в рассматриваемом нами случае ненулевые компоненты тетрады $\lambda_k^{\bar{i}}$ имеют вид

$$\lambda_i^{\bar{0}} = \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}; \quad \lambda_1^{\bar{1}} = \sqrt{\varkappa_{11}}; \quad \lambda_2^{\bar{2}} = \lambda_3^{\bar{3}} = 1, \tag{23.9}$$

то соотношения (23.7) и (23.8) приводят к следующему выражению для энергии:

$$E = m_0c^2u^i\lambda_i^{\bar{0}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left[\frac{dt}{d\tau}\lambda_0^{\bar{0}} + \frac{dx^\alpha}{c\,d\tau}\lambda_\alpha^{\bar{0}}\right] =$$

$$= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{\left[\sqrt{g_{00}}\,dt + \dfrac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}\right]}{d\tau} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Таким образом, для энергии мы получили хорошо известное соотношение, которое согласуется с результатами опытов. Совершенно аналогично мы можем получить выражения и для компонент $P^{\bar{\alpha}}$ импульса

$$P^{\bar{1}} = m_0cu^i\lambda_i^{\bar{1}} = m_0cu^1\lambda_1^{\bar{1}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{\sqrt{\varkappa_{11}}\,dx}{d\tau} = \frac{m_0V^x}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$P^{\bar{2}} = m_0cu^i\lambda_i^{\bar{2}} = m_0cu^2\lambda_2^{\bar{2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{dY}{d\tau} = \frac{m_0V^y}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$P^{\bar{3}} = m_0cu^i\lambda_i^{\bar{3}} = m_0cu^3\lambda_3^{\bar{3}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{dZ}{d\tau} = \frac{m_0V^z}{\sqrt{1-V^2c^2}}.$$

Таким образом, в нашем случае закон построения физических величин приводит к правильным выражениям для энергии и импульса частицы.

При этом, как мы видели, физические величины определяются не только соответствующими координатными величинами, но и метрикой, которая здесь входит в тетрадном представлении. Это еще раз подчеркивает тесную связь физических величин с геометрией пространства-времени.