§ 24. Уравнения электродинамики в произвольной инерциальной системе отсчета

Для решения различных электродинамических задач мы также можем использовать любые допустимые системы координат.

Общековариантные уравнения электромагнитного поля в произвольных координатах имеют вид

$$\nabla_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^i;$$
$$\nabla_l F_{ik} + \nabla_i F_{kl} + \nabla_k F_{li} = 0, \qquad (24.1)$$

где F_{ik} — тензор электромагнитного поля; j^i — 4-вектор тока. В связи с тем, что тензор электромагнитного поля обладает свойствами антисимметрии, его связь с 4-вектором — потенциалом A_i — сохраняет обычный вид:

$$F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \qquad (24.2)$$

В силу антисимметрии тензора F_{ik} уравнения электромагнитного поля (24.1) можно записать в другом виде:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{-g}\, F^{ik}] = \frac{4\pi}{c} j^i; \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \qquad (24.3)$$

Как легко убедиться, последнее уравнение этой системы с учетом выражения (24.2) удовлетворяется тождественно, поэтому мы его в дальнейшем часто будем опускать.

Прежде чем построить общековариантный 4-вектор тока, напомним некоторые сведения о свойствах дельта-функции Дирака (подробнее см. [20—21]).

При обобщении понятий плотности массы и плотности заряда в применении к точечным частицам физики пришли к необходимости ввести в рассмотрение обобщенные функции. И в связи с тем, что эти функции по свойствам в корне отличались от обычных функций, математики весьма настороженно отнеслись к их появлению. Однако, поскольку время показало необходимость и полезность такого обобщения понятия функции, математики вскоре построили теорию обобщенных функций. Из всех обобщенных функций в физике наиболее широко используется дельта-функция Дирака.

Одномерная дельта-функция Дирака определяется требованиями

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty & \text{при } x=0;\\ 0 & \text{при } x\neq 0;\end{cases}$$

$$\int_a^b \delta(x-x_0)\,dx=\begin{cases}1, & x_0\in(a,b);\\ 1/2, & x_0=a \text{ или } x_0=b;\\ 0, & x_0\notin[a,b].\end{cases}$$

Эти определения приводят к следующим свойствам дельта-функции Дирака:

$$\int_b^c f(x)\,\delta(x-a)\,dx=f(a);\quad a\in(b,c);$$

$$\delta(-x)=\delta(x);\quad \delta(ax)=\frac{\delta(x)}{|a|};\tag{24.4}$$

$$\delta(f(x))=\sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{\left|\frac{df}{dx}\right|},$$

где $f(x_n)=0$.

Обобщение одномерной дельта-функции Дирака на трехмерный случай дает

$$\delta(x)=\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3).$$

Поэтому в любой криволинейной системе координат имеем

$$\int \delta(x)\,dx^1\,dx^2\,dx^3=1.\tag{24.5}$$

Отсюда следует, что трехмерная дельта-функция Дирака обладает свойствами скалярной плотности веса 1 при трехмерных преобразованиях координат. Для доказательства этого утверждения достаточно произвести замену переменных в интеграле (24.5) и воспользоваться последним из свойств (24.4) дельта-функции.

В произвольных координатах 4-вектор тока, как мы видели, имеет вид

$$j^i=\rho_0 c u^i.\tag{24.6}$$

Этот 4-вектор удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\nabla_i j^i=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{-g}\,j^i\right]=0.\tag{24.7}$$

Уравнение непрерывности (24.7) можно записать и в виде

$$\frac{c}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\rho v^\alpha)\right]=0, \tag{24.8}$$

причем это соотношение является общековариантным. В силу этого уравнения величина

$$q=\int \rho\, dV=\mathrm{const}$$

не зависит от времени. Таким образом, в произвольных координатах имеем

$$j^i=\left(\frac{\rho c}{\sqrt{-g}},\ \frac{\rho v^\alpha}{\sqrt{-g}}\right). \tag{24.9}$$

Однако в трехмерном пространстве с метрикой $\varkappa_{\alpha\beta}$ удобнее использовать плотность заряда ρ^*, связанную с сохраняющейся плотностью ρ соотношением

$$\rho^*=\frac{\rho}{\sqrt{\varkappa}}. \tag{24.10}$$

В этом случае соотношение между величиной заряда de, находящегося в элементе трехмерного объема $\sqrt{\varkappa}\,dV$, и плотностью заряда ρ^* принимает трехмерно инвариантный вид:

$$de=\rho^*\sqrt{\varkappa}\,dx^1\,dx^2\,dx^3. \tag{24.11}$$

При этом для точечного заряда имеем

$$\rho^*=\frac{q}{\sqrt{\varkappa}}\,\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3). \tag{24.12}$$

Таким образом, с физической точки зрения, плотность ρ^* представляет собой величину заряда, отнесенного к единице инвариантного объема в трехмерном пространстве с метрикой $\varkappa_{\alpha\beta}$. В силу определения (24.10) 4-вектор тока (24.6) мы можем записать и в терминах плотности ρ^*

$$j^i=\left[\frac{c\rho^*}{\sqrt{g_{00}}},\ \frac{\rho^* v^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}\right]. \tag{24.13}$$

Поскольку мы имеем достаточно большой произвол в выборе координат, то координаты можно выбирать, исходя из требований удобства для решения той или иной задачи. В результате решения этих уравнений мы можем определить все интересующие нас координатные величины как функции координатных величин x, y, z, t. Используя соотношения § 22, мы можем потом найти зависимость физических величин от физических координат X, Y, Z и времени T. Таким образом, описание электродинамических явлений в произвольных координатах позволяет получить всю интересующую нас информацию об этом явлении.

Покажем теперь на примере произвольной инерциальной системы отсчета, что такое описание приводит к соотношениям между физическими величинами, которые полностью согласуются с данными опыта.

Найдем сначала выражение для компонент физического 4-вектора тока. Как мы уже знаем, физический 4-вектор тока, как и любой другой 4-вектор, связан с координатным 4-вектором соотношением

$$j^{\bar{i}} = \lambda^{\bar{i}}_n j^n. \tag{24.14}$$

Используя выражения (23.9) для компонент тетрады $\lambda^{\bar{i}}_n$, получим

$$\begin{gathered} j^{\bar{0}} = \rho^0 c u^i \lambda^{\bar{0}}_i = \rho_0 c \frac{dx^i}{ds} \lambda^{\bar{0}}_i = \rho_0 c \frac{d\tau}{ds} = \frac{\rho_0 c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \rho c; \\ j^{\bar{\alpha}} = \rho_0 c u^i \lambda^{\bar{\alpha}}_i = \rho_0 \frac{dX^{\bar{\alpha}}}{d\tau} = \frac{\rho_0 V^\alpha}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \rho V^\alpha. \end{gathered} \tag{24.15}$$

Таким образом, компоненты физического 4-вектора тока удовлетворяют хорошо известному соотношению

$$j^{\bar{\alpha}} = j^{\bar{0}} \frac{V^\alpha}{c}.$$

Найдем теперь закон преобразования компонент координатного 4-вектора тока (24.9) при переходе от одной инерциальной системы отсчета (13.8) к другой. При преобразовании координат 4-вектор, как известно, преобразуется по тензорному закону

$$j^i_{\text{н}} = \frac{\partial x^i_{\text{н}}}{\partial x^l_{\text{c}}} j^l_{\text{c}} (x_{\text{c}} (x_{\text{н}})).$$

Это выражение дает

$$\begin{gathered} j^0_{\text{н}} = \frac{\partial t_{\text{н}}}{\partial t_{\text{c}}} j^0_{\text{c}} + \frac{\partial t_{\text{н}}}{\partial x_{\text{c}}} c j^1_{\text{c}}; \\ j^1_{\text{н}} = \frac{1}{c} \frac{\partial x_{\text{н}}}{\partial t_{\text{c}}} j^0_{\text{c}} + \frac{\partial x_{\text{н}}}{\partial x_{\text{c}}} j^1_{\text{c}}. \end{gathered}$$

Используя формулы преобразования координат и времени (13.8), получим

$$j_{\text{н}}^0 = \frac{j_{\text{с}}^0 + \frac{vc}{c_1 c_2} j_{\text{с}}^1}{\sqrt{\left(1+\frac{v}{c_1}\right)\left(1+\frac{v}{c_2}\right)}};$$
$$j_{\text{н}}^1 = \frac{\left(1+\frac{v}{c_1}+\frac{v}{c_2}\right) j_{\text{с}}^1 - \frac{v}{c} j_{\text{с}}^0}{\sqrt{\left(1+\frac{v}{c_1}\right)\left(1+\frac{v}{c_2}\right)}}. \tag{24.16}$$

Найдем теперь закон преобразования физических компонент 4-вектора тока. Используя выражения (24.14) и (24.16), а также связь (15.4)—(15.7) между координатной и физической скоростями одной системы отсчета относительно другой, получим хорошо известные из опыта формулы преобразования:

$$j_{\text{н}}^{\bar{0}} = \frac{j_{\text{с}}^{\bar{0}} - \frac{V}{c} j_{\text{с}}^{\bar{1}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad j_{\text{н}}^{\bar{1}} = \frac{j_{\text{с}}^{\bar{1}} - \frac{V}{c} j_{\text{с}}^{\bar{0}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Приведем теперь уравнения Максвелла (24.3) к «векторному» виду. Для этого в трехмерном пространстве с метрикой $\varkappa_{\alpha\beta}$ введем единичные антисимметричные тензоры $E^{\alpha\beta\gamma}$ и $E_{\alpha\beta\gamma}$:

$$E^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} e^{\alpha\beta\gamma}; \quad E_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\varkappa}\, e_{\alpha\beta\gamma},$$

где $\varkappa$ — определитель метрического тензора $\varkappa_{\alpha\beta}$;

$$e_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{при наличии совпадающих индексов,} \\ \pm 1, & \text{если все индексы разные,} \end{cases}$$

причем $e_{123} = -e_{213} = 1$.

Введем также обозначения для дифференциальных операций, обобщающих операции $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ и $\operatorname{div} \mathbf{A}$ на случай трехмерного риманова пространства с метрикой $\varkappa_{\alpha\beta}$:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})^\alpha = E^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\beta} A_\gamma;$$
$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\sqrt{\varkappa} A^\alpha\right]. \tag{24.17}$$

Используя эти операции, уравнения Максвелла (24.3) можно записать в «векторном» виде. Для этого введем координатные «векторы» магнитной индукции **B** и электрического смещения **D**:

$$B^{\alpha} = -\frac{1}{2} E^{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}; \quad D^{\alpha} = -\sqrt{g_{00}} F^{0\alpha}, \tag{24.18}$$

а также координатные «векторы» напряженности электрического и магнитного полей:

$$E_{\alpha} = F_{0\alpha}; \quad H_{\alpha} = -\frac{\sqrt{g_{00}}}{2} E_{\alpha\beta\gamma} F^{\beta\gamma}. \tag{24.19}$$

«Векторы» (24.18) и (24.19) не являются независимыми:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{g_{00}}} + [\mathbf{Hn}]; \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{g_{00}}} + [\mathbf{nE}], \tag{24.20}$$

где

$$n_{\alpha} = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}.$$

Разделяя пространственные и временные тензорные индексы во второй группе уравнений Максвелла (24.3), получим

$$\partial_0 F_{\gamma\beta} + \partial_{\gamma} F_{\beta 0} + \partial_{\beta} F_{0\gamma} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\partial_0 F_{\gamma\beta} + \partial_{\beta} E_{\gamma} - \partial_{\gamma} E_{\beta} = 0.$$

Умножим это выражение на $\sqrt{\varkappa}\, E^{\alpha\beta\gamma}$ и учтем, что

$$\partial_n \left(\sqrt{\varkappa}\, E^{\alpha\beta\gamma}\right) = \partial_n e^{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Тогда полученное соотношение в силу определения (24.17) мы можем записать в виде

$$-\frac{1}{c\sqrt{\varkappa}} \frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{\varkappa}\mathbf{B}\right] = \operatorname{rot} \mathbf{E}. \tag{24.21}$$

Совершенно аналогично из уравнений

$$\partial_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} F_{\gamma\alpha} + \partial_{\gamma} F_{\alpha\beta} = 0$$

после умножения на $\sqrt{\varkappa}\, E^{\alpha\beta\gamma}$ и тождественного преобразования получим

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Из первой группы уравнений Максвелла (24.3) при $i=0$ имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho^*. \tag{24.22}$$

Совершенно аналогично при $i=\alpha$ получим

$$\frac{1}{c\sqrt{\varkappa}}\frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{\varkappa}\,\mathbf{D}\right]-\operatorname{rot}\mathbf{H}=-\frac{4\pi}{c}\rho^* v. \tag{24.23}$$

Таким образом, уравнения Максвелла (24.3) мы можем записать в «векторном» виде:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c\sqrt{\varkappa}}\frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{\varkappa}\mathbf{D}\right]+\frac{4\pi}{c}\rho^*\mathbf{v};$$
$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho^*;\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0;$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c\sqrt{\varkappa}}\frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{\varkappa}\mathbf{B}\right].$$

В этой связи необходимо особо подчеркнуть, что введенные выше «векторы» **E**, **D**, **B**, **H** не обладают свойствами 4-векторов. Это утверждение справедливо и в случае специальной теории относительности, в чем легко убедиться непосредственно из законов преобразования «векторов» **E** и **H** при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. По тензорному закону преобразуются компоненты тензора электромагнитного поля F_{ik}. Компоненты этого тензора в соответствии с правилами (24.18) и (24.19) сопоставляются с «векторами» **B** и **E**. В силу нековариантности этого правила «векторы» **B** и **E**, а также **H** и **D** при преобразованиях систем отсчета преобразуются не по тензорному закону, а поэтому и не являются 4-векторами. Однако исторически сложилось так, что привычным стало иметь дело с этими величинами, а не с тензором электромагнитного поля F_{ik}, т. е. выполнять все расчеты в терминах «векторов» **E** и **H**, не забывая при этом, что эти «векторы» преобразуются не по тензорному закону при переходе между различными инерциальными системами отсчета.

Используя определения (24.18) и (24.19), для компоненты T_0^0 тензора энергии-импульса электромагнитного поля получим

$$T_0^0=\frac{1}{4\pi}\left(-F_{0\alpha}F^{0\alpha}+\frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}\right)=\frac{(\mathbf{ED})+(\mathbf{BH})}{8\pi\sqrt{g_{00}}}. \tag{24.24}$$

Здесь учтено, что

$$E_{\alpha\beta\gamma}E^{\alpha\nu\mu}=(\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\mu}_{\gamma}-\delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\gamma}).$$

Для потока энергии электромагнитного поля имеем

$$P^{\alpha}=T^{\alpha}_{0}=-\frac{1}{4\pi}F_{0\beta}F^{\alpha\beta}=-\frac{1}{4\pi}E_{\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{24.25}$$

Из выражения (24.19) следует, что

$$F^{\alpha\beta}=-\frac{E^{\mu\alpha\beta}}{\sqrt{g_{00}}}H_{\mu}.$$

Поэтому соотношение (24.25) может быть записано в виде

$$T^{\alpha}_{0}=\frac{1}{4\pi\sqrt{g_{00}}}E^{\alpha\beta\mu}E_{\beta}H_{\mu}.$$

Поскольку

$$([\mathbf{EH}])^{\alpha}=E^{\alpha\beta\mu}E_{\beta}H_{\mu},$$

то для вектора импульса электромагнитного поля имеем

$$\mathbf{P}=\frac{1}{4\pi\sqrt{g_{00}}}[\mathbf{EH}].$$

Найдем теперь закон преобразования координатных «векторов» $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ при переходе между различными инерциальными системами отсчета. Мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
E_1=F_{01};\quad E_2=F_{02};\quad E_3=F_{03};\\
D^1=-\sqrt{g_{00}}F^{01};\quad D^2=-\sqrt{g_{00}}F^{02};\quad D^3=-\sqrt{g_{00}}F^{03};\\
B^1=-\frac{F_{23}}{\sqrt{\varkappa}}=\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{-g}}F_{23};\quad B^2=\frac{F_{13}}{\sqrt{\varkappa}}=\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{-g}}F_{13};\\
B^3=-\frac{F_{12}}{\sqrt{\varkappa}}=-\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{-g}}F_{12};\quad H_1=-\sqrt{-g}\,F^{23};\\
H_2=\sqrt{-g}F^{13};\quad H_3=-\sqrt{-g}F^{12}.
\end{gathered} \tag{24.26}$$

Так как компоненты координатного тензора F_{ik} преобразуются по тензорному закону

$$F^{\text{н}}_{ik}=\frac{\partial x^{l}_{\text{с}}}{\partial x^{i}_{\text{н}}}\frac{\partial x^{m}_{\text{с}}}{\partial x^{k}_{\text{н}}}F^{\text{с}}_{lm},$$

при переходе между различными инерциальными системами отсчета компоненты координатного «вектора» напряженности электрического поля обладают следующим трансформационным законом:

$$E^{\text{н}}_{\alpha}=F^{\text{н}}_{0\alpha}=\left(\frac{\partial t_{\text{c}}}{\partial t_{\text{н}}}\frac{\partial x^{\beta}_{\text{c}}}{\partial x^{\alpha}_{\text{н}}}-\frac{\partial x^{\beta}_{\text{c}}}{\partial t_{\text{н}}}\frac{\partial t_{\text{c}}}{\partial x^{\alpha}_{\text{н}}}\right)E^{\text{c}}_{\beta}+\frac{1}{c}\frac{\partial x^{\nu}_{\text{c}}}{\partial t_{\text{н}}}\frac{\partial x^{\beta}_{\text{c}}}{\partial x^{\alpha}_{\text{н}}}F^{\text{c}}_{\nu\beta}. \quad (24.27)$$

Учитывая, что

$$F_{\nu\beta}=-E_{\mu\nu\beta}B^{\mu},$$

получим

$$E^{\text{н}}_{\alpha}=\left(\frac{\partial t_{\text{c}}}{\partial t_{\text{н}}}\frac{\partial x^{\beta}_{\text{c}}}{\partial x^{\alpha}_{\text{н}}}-\frac{\partial x^{\beta}_{\text{c}}}{\partial t_{\text{н}}}\frac{\partial t_{\text{c}}}{\partial x^{\alpha}_{\text{н}}}\right)E^{\text{c}}_{\beta}-E_{\mu\nu\beta}B^{\mu}_{\text{c}}\frac{1}{c}\frac{\partial x^{\nu}_{\text{c}}}{\partial t_{\text{н}}}\frac{\partial x^{\beta}_{\text{c}}}{\partial x^{\alpha}_{\text{н}}}. \quad (24.28)$$

Совершенно аналогично для пространственных компонент тензора электромагнитного поля получаем

$$F^{\text{н}}_{\alpha\beta}=c\left(\frac{\partial t_{\text{c}}}{\partial x^{\beta}_{\text{н}}}\frac{\partial x^{\nu}_{\text{c}}}{\partial x^{\alpha}_{\text{н}}}-\frac{\partial t_{\text{c}}}{\partial x^{\alpha}_{\text{н}}}\frac{\partial x^{\nu}_{\text{c}}}{\partial x^{\beta}_{\text{н}}}\right)E^{\text{c}}_{\nu}-E_{\mu\nu\eta}B^{\eta}_{\text{c}}\frac{\partial x^{\mu}_{\text{c}}}{\partial x^{\beta}_{\text{н}}}\frac{\partial x^{\nu}_{\text{c}}}{\partial x^{\alpha}_{\text{н}}}. \quad (24.29)$$

Поскольку при переходе между инерциальными системами координат метрика остается форминвариантной, то из соотношений (24.26) имеем

$$\begin{aligned} B^{1}_{\text{н}}&=-\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{-g}}F^{\text{н}}_{23}; \quad B^{2}_{\text{н}}=\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{-g}}F^{\text{н}}_{13};\\ B^{3}_{\text{н}}&=-\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{-g}}F^{\text{н}}_{12}. \end{aligned} \quad (24.30)$$

Таким образом, выражения (24.28), (24.29) и (24.30) определяют закон преобразования компонент «векторов» **B** и **E** при переходах между инерциальными системами отсчета. Легко получить и соответствующие формулы преобразования координатных векторов **D** и **H**.

Найдем теперь закон преобразования компонент физических векторов **B**, **H**, **E** и **D** при переходе между различными инерциальными системами отсчета. Заметим прежде всего, что компоненты физических векторов **D** и **E**, а также **B** и **H** совпадают, если уравнения Максвелла рассматриваются в вакууме ($\varepsilon=\mu=1$):

$$D^{\overline{\alpha}}=E_{\overline{\alpha}}; \quad B^{\overline{\alpha}}=H_{\overline{\alpha}}.$$

Это непосредственно следует из соотношений (24.26). Так, например, мы имеем

$$D^{\bar{\alpha}} = -\sqrt{g_{\bar{0}\bar{0}}}\, F^{\bar{0}\bar{\alpha}}.$$

Поскольку

$$\sqrt{g_{\bar{0}\bar{0}}} = 1;\quad F^{\bar{0}\bar{\alpha}} = \gamma^{\bar{0}\bar{0}}\gamma^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}F_{\bar{0}\bar{\beta}} = -F_{\bar{0}\bar{\alpha}},$$

то в силу выражения (24.19) имеем

$$D^{\bar{\alpha}} = E_{\bar{\alpha}}.$$

Найдем соотношения между компонентами координатного тензора и компонентами физически измеримых векторов $E_{\bar{\alpha}}$ и $B^{\bar{\alpha}}$.

Используя выражения (23.9) для компонент тетрады $\lambda^{\bar{n}}_{k}$, определим компоненты $\lambda^{m}_{\bar{l}} = \gamma_{\bar{l}\bar{n}} g^{mk}\lambda^{\bar{n}}_{k}$ этой же тетрады:

$$\begin{aligned} &\lambda^{1}_{\bar{1}} = -g^{11}\sqrt{\varkappa_{11}};\quad \lambda^{2}_{\bar{2}} = 1;\quad \lambda^{3}_{\bar{3}} = 1;\\ &\lambda^{n}_{\bar{0}} = \frac{\delta^{n}_{0}}{\sqrt{g_{00}}};\quad \lambda^{0}_{\bar{1}} = -g^{01}\sqrt{\varkappa_{11}}. \end{aligned} \tag{24.31}$$

Тогда для компонент физического вектора $E_{\bar{\alpha}}$ получим

$$\begin{aligned} &E_{\bar{1}} = F_{\bar{0}\bar{1}} = \lambda^{n}_{\bar{0}}\lambda^{m}_{\bar{1}}F_{nm} = -E_1 g^{11}\sqrt{\frac{\varkappa_{11}}{g_{00}}};\\ &E_{\bar{2}} = \frac{E_2}{\sqrt{g_{00}}};\quad E_{\bar{3}} = \frac{E_3}{\sqrt{g_{00}}}. \end{aligned} \tag{24.32}$$

Совершенно аналогично имеем

$$\begin{aligned} &B^{\bar{1}} = \sqrt{g_{\bar{0}\bar{0}}}\,F_{\bar{2}\bar{3}} = F_{23};\\ &B^{\bar{2}} = \sqrt{g_{\bar{0}\bar{0}}}\,F_{\bar{1}\bar{3}} = -g^{11}\sqrt{\varkappa_{11}}\,F_{13} - g^{01}\sqrt{\varkappa_{11}}\,F_{03};\\ &B^{\bar{3}} = F_{\bar{2}\bar{1}} = (g^{11}F_{12} + g^{01}F_{02})\sqrt{\varkappa_{11}}. \end{aligned} \tag{24.33}$$

Используя формулы преобразования (13.7) от одной инерциальной системы отсчета к другой, из соотношений

(24.28) и (24.29) получим

$$
\begin{aligned}
&E_1^{\text{н}} = E_1^{\text{с}}; \quad F_{23}^{\text{н}} = F_{23}^{\text{с}};\\
&E_2^{\text{н}} = \left(\frac{c\,(c_2-c_1) - V\,(c_1+c_2)}{c\,(c_2-c_1)}\,E_2^{\text{с}} - \frac{2c_1c_2V}{c\,(c_2-c_1)}\,F_{12}^{\text{с}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}};\\
&E_3^{\text{н}} = \frac{[c\,(c_2-c_1) - V\,(c_1+c_2)]\,E_3^{\text{с}} - 2c_1c_2VF_{13}^{\text{с}}}{c\,(c_2-c_1)\sqrt{1-V^2/c^2}};\\
&F_{12}^{\text{н}} = \frac{2VE_2^{\text{с}} + [c\,(c_2-c_1) + V\,(c_1+c_2)]\,F_{12}^{\text{с}}}{c\,(c_2-c_1)\sqrt{1-V^2/c^2}};\\
&F_{13}^{\text{н}} = \frac{2VE_3^{\text{с}} + [c\,(c_2-c_1) + V\,(c_1+c_2)]\,F_{13}^{\text{с}}}{c\,(c_2-c_1)\sqrt{1-V^2/c^2}},
\end{aligned}
\tag{24.34}
$$

где V — физически измеримая скорость движения одной инерциальной системы относительно другой.

Учтем также связь между координатными и физическими компонентами тензора F_{ik}:

$$
\begin{aligned}
&E_1 = F_{01} = \lambda_0^{\bar n}\lambda_1^{\bar m}F_{\bar n\bar m} = \sqrt{g_{00}\varkappa_{11}}\,F_{\bar 0\bar 1};\\
&E_2 = F_{02} = \lambda_0^{\bar n}\lambda_2^{\bar m}F_{\bar n\bar m} = \sqrt{g_{00}}\,F_{02};\\
&E_3 = F_{03} = \sqrt{g_{00}}\,F_{\bar 0\bar 3};\\
&F_{12} = \frac{g_{01}}{\sqrt{g_{00}}}\,F_{\bar 0\bar 2} + \sqrt{\varkappa_{11}}\,F_{\bar 1\bar 2};\\
&F_{23} = F_{\bar 2\bar 3}; \quad F_{13} = \frac{g_{01}}{\sqrt{g_{00}}}\,F_{\bar 0\bar 3}\sqrt{\varkappa_{11}}\,F_{\bar 1\bar 3}.
\end{aligned}
\tag{24.35}
$$

Тогда из первого уравнения выражения (24.32) имеем

$$E_{\bar 1}^{\text{н}} = -g^{11}\sqrt{\frac{\varkappa_{11}}{g_{00}}}\,E_1^{\text{н}}.$$

Подставляя в правую часть этого равенства первое из уравнений (24.34), получим

$$E_{\bar 1}^{\text{н}} = -g^{11}\sqrt{\frac{\varkappa_{11}}{g_{00}}}\,E_1^{\text{с}}.$$

Но в силу первого равенства (24.35) это выражение можно записать в виде

$$E_{\bar 1}^{\text{н}} = -g^{11}\varkappa_{11}E_{\bar 1}^{\text{с}}.$$

Учитывая выражения для компонент тензоров g_{ik} и $\varkappa_{\alpha\beta}$, отсюда имеем

$$E^{\text{н}}_{\bar{1}} = E^{\text{с}}_{\bar{1}}.$$

Совершенно аналогично можно найти формулы преобразования и для остальных компонент физических векторов **B** и **E**:

$$\begin{aligned}
&B^{\text{н}}_{\bar{1}} = B^{\text{с}}_{\bar{1}};\\
&B^{\text{н}}_{\bar{2}} = \frac{B^{\text{с}}_{\bar{2}} - \frac{V}{c} E^{\text{с}}_{\bar{3}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad B^{\text{н}}_{\bar{3}} = \frac{B^{\text{с}}_{\bar{3}} + \frac{V}{c} E^{\text{с}}_{\bar{2}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}};\\
&E^{\text{н}}_{\bar{2}} = \frac{E^{\text{с}}_{\bar{2}} + \frac{V}{c} B^{\text{с}}_{\bar{3}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad E^{\text{н}}_{\bar{3}} = \frac{E^{\text{с}}_{\bar{3}} - \frac{V}{c} B^{\text{с}}_{\bar{2}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.
\end{aligned} \tag{24.36}$$

Таким образом, получаем хорошо известные правила преобразования трехмерных компонент физических «векторов» напряженностей электрического и магнитного полей при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Мы видим, что описание физических явлений возможно в любых допустимых системах координат, но каждый раз надо помнить, что наряду с координатным описанием должны быть физические величины, поскольку только они непосредственно связаны со структурой пространства-времени, т. е. с расстоянием и временным промежутком. Если это помнить, то переход от координатных величин к физическим не будет изменять все известные физические результаты, поэтому ясно, что от системы координат описание зависеть не будет.