Глава II

Геометрия и физика

Все физические процессы протекают в пространстве и времени, поэтому изучение геометрии пространства-времени и выяснение всех ее свойств играет важнейшую роль для физики. Наиболее ярко связь геометрии с физикой проявляется при анализе таких вопросов, как определение естественной геометрии для того или иного физического поля, выяснение возможностей для получения законов сохранения в теории, нахождение систем отсчета, неотличимых от некоторой заданной системы с точки зрения любого физического эксперимента. Решение всех этих вопросов существенно зависит от характера геометрии, позволяя дать однозначный положительный ответ в одних случаях и отрицательный — в других, поэтому возникает необходимость специально остановиться на обсуждении этих вопросов.

Однако, прежде чем начать изложение, я кратко напомню основные сведения из тензорного анализа и римановой геометрии [22—24], которые потребуются в дальнейшем.

§ 25. Тензорный анализ

Рассмотрим некоторую совокупность n независимых переменных $x^i = [x^1, x^2, \ldots, x^n]$. Эту совокупность можно рассматривать как систему координат в n-мерном пространстве в том смысле, что каждая система значений этих переменных определяет точку в пространстве. Зададим теперь систему n независимых вещественных функций $f^k(x^i)$, $k=1, \ldots, n$ от переменных x^i, непрерывных вместе с их частными производными до N-го порядка. Для того чтобы эти функции были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы якобиан

$$J = \det \left\| \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \right\| \tag{25.1}$$

был не равен нулю. Тогда совокупность переменных

$$x'^i = f^i (x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{25.2}$$

будет представлять собой другую систему координат в пространстве: если в правую часть равенств (25.2) подставить координаты x^i какой-либо точки A пространства, то эти равенства дадут координаты x'^i той же точки A в новой системе координат.

Так как якобиан (25.1) преобразования (25.2) отличен от нуля в каждой точке пространства, то преобразование (25.2) однозначно и обратимо, т. е. в окрестности каждой точки допускает обратное преобразование

$$x^i = \varphi^i (x'^1, x'^2, \ldots, x'^n). \tag{25.3}$$

Поскольку при описании различных физических процессов используются различные упорядоченные системы функций Ψ^a $(a = 1, 2, \ldots, m)$, заданные в каждой точке пространства или в некоторой его области, то нам следует изучить трансформационные свойства различных систем функций при преобразованиях координат (25.2).

Будем называть полем геометрического объекта (или просто геометрическим объектом) P-го порядка, заданным в n-мерном пространстве (или в некоторой его области) упорядоченную систему функций $\Psi^a (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ от координат этого пространства, определенную в каждой локальной системе координат и изменяющуюся при любом преобразовании (25.2) по закону

$$\Psi'^a (x') = Y^a \left(x', \frac{\partial x'^i}{\partial x^{k_1}}, \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^{k_1} \partial x^{k_2}}, \ldots, \right.$$
$$\left. \frac{\partial^p x'^i}{\partial x^{k_1} \partial x^{k_2} \ldots \partial x^{k_p}}, \Psi^b (x(x')) \right); \quad (a, b = 1, 2, \ldots, m). \tag{25.4}$$

Следует особо подчеркнуть, что все величины, стоящие в правой части закона преобразования любого геометрического объекта (25.4), должны быть выражены с помощью обратного преобразования (25.3) как функции штрихованных переменных $x'^1, x'^2, \ldots, x'^n$. Классификация геометрических объектов проводится в зависимости от вида преобразования (25.4). Наиболее простым геометрическим объектом является поле скаляра, определяемое в каждой системе координат Ω и Ω' одной функцией $\Psi(x)$ или $\Psi'(x')$ соответственно. При преобразовании координатной системы (25.2) скаляр преобразуется по закону

$$\Psi'(x') = \Psi(x(x')). \tag{25.5}$$

Выражения (25.2) и (25.5) дают возможность определить законы преобразований для градиента от скалярной функции $\partial\Psi(x)/\partial x^i$ и дифференциалов dx^i. Действительно, продифференцируем правую и левую части равенства (25.5) по x'^i:

$$\frac{\partial\Psi'(x')}{\partial x'^i} = \frac{\partial}{\partial x'^i}\Psi(x(x')).$$

Учитывая правило дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial}{\partial x'^i}\Psi(x(x')) = \frac{\partial\Psi(x)}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i},$$

имеем окончательно

$$\frac{\partial\Psi'(x)}{\partial x'^i} = \frac{\partial\Psi(x)}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}. \tag{25.6}$$

Напомню, что здесь и далее по одинаковым ко- и контравариантным индексам подразумевается суммирование. Совершенно аналогично, взяв дифференциалы от правой и левой частей равенства (25.2), имеем

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}dx^k. \tag{25.7}$$

Мы видим, таким образом, что существуют по крайней мере два типа геометрических объектов первого порядка, обладающих одним индексом, которые при преобразованиях координат могут изменяться по законам (25.6) и (25.7) соответственно. Система функций, преобразующаяся как дифференциал, получила название контравариантного вектора. В каждой системе координат контравариантный вектор $a^i(x)$ определяется совокупностью n вещественных функций $a^i(x) = [a^1(x), a^2(x), \ldots, a^n(x)]$, взятых в определенном порядке, и преобразуется при переходе (25.2) к другой системе координат по закону

$$a'^{i}(x') = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} a^{k}(x(x')). \tag{25.8}$$

Ковариантный вектор $a_i(x)$ также определяется совокупностью n вещественных функций $a_i(x) = [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)]$, взятых в определенном порядке, но при преобразовании координат (25.2) он преобразуется аналогично градиенту $\partial\Psi/\partial x^i$ от скаляра

$$a'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} a_k(x(x')). \tag{25.9}$$

Более общим по сравнению с вектором геометрическим объектом первого порядка является тензор. k раз ковариантным и l раз контравариантным тензором $T^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)$ мы будем называть геометрический объект, определяющийся в каждой локальной системе координат совокупностью n^{l+k} функций, взятых в определенном порядке и преобразующийся при переходе к другой системе координат (25.2) по закону

$$T'^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x') = \frac{\partial x^{a_1}}{\partial x'^{i_1}} \frac{\partial x^{a_2}}{\partial x'^{i_2}} \cdots \frac{\partial x^{a_k}}{\partial x'^{i_k}} \times$$
$$\times \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{b_1}} \frac{\partial x'^{j_2}}{\partial x^{b_2}} \cdots \frac{\partial x'^{j_l}}{\partial x^{b_l}} T^{b_1 b_2 \ldots b_l}_{a_1 a_2 \ldots a_k}(x(x')). \tag{25.10}$$

Легко убедиться в том, что рассмотренные нами выше скаляр (25.5), контравариантный (25.8) и ковариантный (25.9) векторы являются частными случаями тензора при $k=0$, $l=0$; $k=0$, $l=1$ и $k=1$, $l=0$ соответственно.

Тензор при любом числе ко- и контравариантных индексов называется равным нулю в некоторой области пространства, если все его компоненты равны нулю в этой области. Из трансформационных свойств тензора (25.10) следует, что обращение его в нуль в некоторой области пространства инвариантно относительно выбора системы координат: если тензор равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю и в другой неособенной системе координат.

Следует отметить, что в силу правил дифференцирования сложных функций $x^i = x^i(x'(x''))$ и $x''^i = x''^i(x'(x))$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x''^\gamma} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^l}{\partial x''^\gamma}; \quad \frac{\partial x''^i}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial x''^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^l}{\partial x^\gamma} \tag{25.11}$$

и свойства определителя

$$\mathrm{det}\left\|\frac{\partial x''}{\partial x}\right\| = \quad \left\|\frac{\partial x''}{\partial x'}\right\| \ \mathrm{et}\left\|\frac{\partial x'}{\partial x}\right\|$$

преобразования тензоров при преобразованиях координат образуют непрерывную группу преобразований.

Заканчивая обзор трансформационных свойств тензоров, отметим также, что символ Кронекера δ^i_k, являющийся тензором, в любой системе координат имеет следующие компоненты:

$$\delta^i_k = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k; \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \tag{25.12}$$

Переходя к тензорной алгебре, рассмотрим основные инвариантные операции над тензорами. Этих операций четыре: сложение, умножение, свертывание тензоров и подстановка индексов у тензора.

Операция алгебраического сложения применима к тензорам, имеющим одинаковое число ко- и контравариантных индексов. Для получения алгебраической суммы двух или более тензоров в любой координатной системе, алгебраически складываются в каждой точке пространства соответствующие компоненты тензоров. В частном случае сложения тензоров второго ранга имеем

$$S^{ik}(x) = A^{ik}(x) + B^{ik}(x). \tag{25.13}$$

В отличие от сложения перемножать можно различные тензоры. Так, например, произведением тензора $A^{ik}(x)$ на тензор $B^l_m(x)$ мы будем называть тензор $c^{ikl}_m(x)$, компоненты которого в каждой координатной системе получаются перемножением соответствующих компонент сомножителей:

$$c^{ikl}_m(x) = A^{ik}(x)\,B^l_m(x). \tag{25.14}$$

Операция свертывания применима лишь к тензору, имеющему как ковариантные, так и контравариантные индексы.

Свертывание тензора $B^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p\ldots\nu_l}_{i_1i_2\ldots i_q\ldots i_k}$ по p-му контравариантному и q-му ковариантному индексам осуществляется умножением этого тензора на символ Кронекера $\delta^{i_q}_{\nu_p}$, в результате чего получается тензор с уменьшенными на единицу числами ко- и контравариантных индексов. В частном случае смешанного тензора второго ранга $B^i_k(x)$ результатом операции свертывания индексов и является скаляр $B(x)$:

$$B(x) = B^i_k(x)\,\delta^k_i = B^i_i(x). \tag{25.15}$$

Операция подстановки индексов позволяет по любому заданному тензору, имеющему два или более одноименных индекса, получить новый тензор путем изменения порядка двух или более индексов в записи первоначального тензора. Так как в определение тензора входит и порядок следования его верхних и нижних индексов, то полученный в результате операции подстановки индексов тензор будет отличаться от исходного тензора.

Пусть, например, мы имели тензор $A^{\nu_1\nu_2}_{i_1i_2}(x)$. В результате операции подстановки индексов мы можем получить в общем случае три различных тензора:

$$B^{\nu_1\nu_2}_{i_1i_2}(x) = A^{\nu_2\nu_1}_{i_1i_2}(x);$$
$$C^{\nu_1\nu_2}_{i_1i_2}(x) = A^{\nu_1\nu_2}_{i_2i_1}(x);$$
$$Q^{\nu_1\nu_2}_{i_1i_2}(x) = A^{\nu_2\nu_1}_{i_2i_1}(x).$$

Операция подстановки индексов является составной частью операций симметрирования и альтернирования. Операция симметрирования по каким-либо N одноименным индексам тензора осуществляется следующим образом. Сначала производится $N!$ подстановок по этим индексам у исходного тензора. Затем берется среднее арифметическое всех полученных при этом $N!$ тензоров. Наиболее часто симметрирование проводят по двум индексам. Индексы, по которым проводится симметрирование, заключаются в круглые скобки:

$$A^{(j_1j_2)\ldots j_l}_{i_1i_2\ldots i_k}(x) = \frac{1}{2!}\left[A^{j_1j_2\ldots j_l}_{i_1i_2\ldots i_k}(x) + A^{j_2j_1\ldots j_l}_{i_1i_2\ldots i_k}(x)\right],$$
$$A^{j_1j_2\ldots j_l}_{(i_1i_2)\ldots i_k}(x) = \frac{1}{2!}\left[A^{j_1j_2\ldots j_l}_{i_1i_2\ldots i_k}(x) + A^{j_1j_2\ldots j_l}_{i_2i_1\ldots i_k}(x)\right]. \tag{25.16}$$

Тензор, не меняющийся при любой подстановке нескольких одноименных индексов, мы будем называть симметрическим по этим индексам.

Для проведения операции альтернирования по N одноименным индексам тензора необходимо произвести $N!$ всевозможных подстановок этих индексов, изменить знаки у нечетных подстановок на противоположные и взять среднее арифметическое от всех полученных при этом $N!$ тензоров. Индексы, по которым проводится альтернирование, заключаются в квадратные скобки:

$$A^{[j_1 j_2] \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) = \frac{1}{2!}\left[A^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) - A^{j_2 j_1 \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)\right];$$

$$A^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{[i_1 i_2] \ldots i_k}(x) = \frac{1}{2!}\left[A^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) - A^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{i_2 i_1 \ldots i_k}(x)\right]. \tag{25.17}$$

§ 26. Риманова геометрия

Римановым пространством V_n называется вещественное дифференцируемое многообразие M класса C^N (т. е. имеющее непрерывные частные производные по всем аргументам до порядка $N > 1$ включительно), в каждой точке которого задано поле тензора

$$g_{ik} = g_{ik}(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n), \tag{26.1}$$

два раза ковариантного, симметрического и невырожденного:

$$g_{ik} = g_{ki}; \quad g = \det \| g_{ik} \| \neq 0. \tag{26.2}$$

Тензор $g_{ik} = g_{ik}(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n)$ мы будем называть метрическим тензором риманова пространства V_n, определитель которого (26.2) в силу правила умножения определителей при преобразовании координат (25.2) обладает следующим трансформационным законом: $g' = gJ^{-2}$. Отсюда следует, что определитель метрического тензора риманова пространства V_n является скалярной плотностью веса $+2$.

С помощью метрического тензора в римановом пространстве можно ввести инвариантную дифференциальную форму

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k, \tag{26.3}$$