Тензор, не меняющийся при любой подстановке нескольких одноименных индексов, мы будем называть симметрическим по этим индексам.

Для проведения операции альтернирования по N одноименным индексам тензора необходимо произвести $N!$ всевозможных подстановок этих индексов, изменить знаки у нечетных подстановок на противоположные и взять среднее арифметическое от всех полученных при этом $N!$ тензоров. Индексы, по которым проводится альтернирование, заключаются в квадратные скобки:

$$A^{[j_1j_2]\,\dots\, j_l}_{i_1i_2\,\dots\, i_k}(x)=\frac{1}{2!}\left[A^{j_1j_2\,\dots\, j_l}_{i_1i_2\,\dots\, i_k}(x)-A^{j_2j_1\,\dots\, j_l}_{i_1i_2\,\dots\, i_k}(x)\right];$$

$$A^{j_1j_2\,\dots\, j_l}_{[i_1i_2]\,\dots\, i_k}(x)=\frac{1}{2!}\left[A^{j_1j_2\,\dots\, j_l}_{i_1i_2\,\dots\, i_k}(x)-A^{j_1j_2\,\dots\, j_l}_{i_2i_1\,\dots\, i_k}(x)\right]. \tag{25.17}$$

§ 26. Риманова геометрия

Римановым пространством V_n называется вещественное дифференцируемое многообразие M класса C^N (т. е. имеющее непрерывные частные производные по всем аргументам до порядка $N>1$ включительно), в каждой точке которого задано поле тензора

$$g_{ik}=g_{ik}(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n), \tag{26.1}$$

два раза ковариантного, симметрического и невырожденного:

$$g_{ik}=g_{ki};\quad g=\det\|g_{ik}\|\neq 0. \tag{26.2}$$

Тензор $g_{ik}=g_{ik}(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n)$ мы будем называть метрическим тензором риманова пространства V_n, определитель которого (26.2) в силу правила умножения определителей при преобразовании координат (25.2) обладает следующим трансформационным законом: $g'=gJ^{-2}$. Отсюда следует, что определитель метрического тензора риманова пространства V_n является скалярной плотностью веса $+2$.

С помощью метрического тензора в римановом пространстве можно ввести инвариантную дифференциальную форму

$$ds^2=g_{ik}\,dx^i\,dx^k, \tag{26.3}$$

называемую основной метрической формой этого пространства (или интервалом риманова пространства V_n), обобщающую понятие квадрата дифференциала дуги на случай риманова пространства V_n. Это позволяет дать другое, эквивалентное первому, определение пространства V_n: римановым пространством V_n называется многообразие M, в котором задана инвариантная квадратичная дифференциальная форма

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k,$$

где g_{ik} является функцией класса C^N и удовлетворяет условиям

$$\det \| g_{ik} \| \neq 0; \quad g_{ik} = g_{ki}.$$

В каждой точке риманова пространства V_n выражение (26.3) представляет собой алгебраическую квадратичную форму относительно дифференциалов dx^i. При преобразовании координат (25.2) преобразование дифференциалов dx^i в каждой точке риманова пространства V_n является линейным преобразованием с постоянными коэффициентами и поэтому в каждой фиксированной точке риманова пространства V_n можно применять алгебраическую теорию преобразований квадратичных форм. Согласно этой теории метрический тензор g_{ik}, который в данном случае является матрицей, может быть диагонализирован в этой точке. При этом в общем случае диагональные компоненты матрицы g_{ik} не все будут положительными при вещественных преобразованиях (25.2). Но в силу закона инерции квадратичных форм разность между числом положительных и числом отрицательных диагональных компонент будет постоянна при любом вещественном преобразовании, приводящим квадратичную форму к диагональному виду. Эта разность называется сигнатурой метрического тензора риманова пространства V_n в данной точке. Следует отметить, что сигнатурой метрического тензора часто называют также и совокупность знаков диагональных компонент этого тензора в каждой точке.

Таким образом, в произвольном римановом пространстве V_n интервал (26.3) в общем случае является знаконеопределенным. Будем называть в дальнейшем интервал (26.3) времениподобным (а), изотропным (б) и пространственноподобным (в), в зависимости от того, какой из трех случаев реализуется:

а) $ds^2 > 0$, б) $ds^2 = 0$, в) $ds^2 < 0$.

Поскольку определитель (26.2) ковариантного метрического тензора (26.1) отличен от нуля в каждой точке риманова пространства V_n, то мы можем построить контравариантный метрический тензор $g^{kl} = g^{kl}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, обратный ковариантному метрическому тензору g_{ik}, т. е. тензор, удовлетворяющий условиям

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l. \tag{26.4}$$

Наличие контравариантного и ковариантного метрических тензоров позволяет определить в римановом пространстве V_n ряд новых операций с тензорами. В частности, при помощи тензоров g_{ik} и g^{kl} в римановом пространстве V_n вводится операция поднятия тензорного индекса

$$A^p(x) = g^{mp} A_m(x). \tag{26.5}$$

Аналогичным образом определяется и операция опускания тензорного индекса

$$A_p(x) = g_{mp} A^m(x). \tag{26.6}$$

Эти операции имеют тензорный характер, в результате которых из исходного тензора получается тензор с другими числами ковариантных и контравариантных индексов.

Кроме того, в римановом пространстве V_n наличие метрического тензора позволяет естественным путем построить аппарат ковариантного (или, как иногда говорят, абсолютного) дифференцирования. Центральную роль в определении ковариантного дифференцирования играет понятие параллельного переноса тензора из бесконечно близкой точки в данную точку. Главная линейная часть разности между значением тензора в данной точке и ее значением, полученным в результате параллельного переноса из бесконечно близкой точки, и будет абсолютным дифференциалом, имеющим тензорный характер в римановом пространстве V_n. Проиллюстрируем сказанное простым примером.

Рассмотрим некоторый контравариантный тензор первого ранга. Пусть его значение в некоторой точке x^i есть

A^i, а в бесконечно близкой точке x^i+dx^i он равен A^i+dA^i. Поскольку dA^i является разностью компонент двух тензоров в бесконечно близких точках, при преобразованиях координат величина $dA^i=(\partial A^i/\partial x^l)\,dx^l$ преобразуется не по тензорному закону (25.10).

Произведем теперь параллельный перенос вектора A^i из точки x^i в бесконечно близкую точку x^i+dx^i. В результате параллельного переноса значение этого вектора в точке x^i+dx^i будет равно $A^i+\delta A^i$. Приращение вектора δA^i при параллельном переносе должно линейно зависеть от векторов A^i, dx^i и от величины Γ^i_{kl}, характеризующих риманово пространство V_n:

$$\delta A^i=-\Gamma^i_{kl}A^k dx^l. \tag{26.7}$$

В этом случае результат двух последовательных бесконечно малых параллельных переносов будет совпадать с результатом одного параллельного переноса из начальной точки в конечную, а результат параллельного переноса суммы двух векторов будет равен сумме приращений каждого из них при этом переносе.

Разность вектора A^i+dA^i и вектора $A^i+\delta A^i$, параллельно перенесенного из точки x^i в бесконечно близкую точку x^i+dx^i, будет равна

$$DA^i=dA^i-\delta A^i. \tag{26.8}$$

Как можно показать, эта разность является тензором. Учитывая выражение (26.7), имеем

$$DA^i=\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l}+\Gamma^i_{kl}A^k\right)dx^l. \tag{26.9}$$

Поскольку величины DA^i и dx^l являются тензорами, то и выражение, стоящее в скобках в правой части соотношения (26.9), является тензором, который называют ковариантной производной вектора A^i и обозначают

$$\nabla_l A^i=A^i_{;l}=\frac{\partial A^i}{\partial x^l}+\Gamma^i_{kl}A^k. \tag{26.10}$$

Аналогичным образом можно построить и выражение для ковариантной производной от ковариантного вектора B_i:

$$\nabla_l B_i=\frac{\partial B_i}{\partial x^l}-\Gamma^k_{il}B_k. \tag{26.11}$$

Выражение для символов Кристоффеля второго рода Γ^i_{kl} (или, как их иногда называют, связностей риманова пространства) можно получить, если учесть, что при параллельном переносе величина скаляра не изменяется

$$\delta\left[g_{ik}A^iB^k\right]=0.$$

После несложных вычислений имеем

$$\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{26.12}$$

Из определения (26.7) следует, что символы Кристоффеля второго рода не являются тензором. При преобразованиях координат (25.2) компоненты связности Γ^i_{kl} риманова пространства преобразуются по закону

$$\Gamma'^i_{kl}(x')=\Gamma^p_{ms}(x(x'))\frac{\partial x'^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\frac{\partial x^s}{\partial x'^l}+\frac{\partial x'^i}{\partial x^p}\frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^k\,\partial x'^l}. \tag{26.13}$$

Таким образом, связность риманова пространства V_n является линейным неоднородным геометрическим объектом второго порядка.

Приведем здесь также и необходимые для дальнейшего соотношения

$$\Gamma^i_{ki}=\frac{1}{2}g^{im}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k}; \tag{26.14}$$

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl}=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{-g}\,g^{ik}\right], \tag{26.15}$$

которые легко получить из выражения (26.12), если учесть, что

$$dg=gg^{ik}dg_{ik}=-gg_{ik}dg^{ik}. \tag{26.16}$$

Выражения (26.10) и (26.11) для ковариантных производных контравариантного A^i и ковариантного B_i векторов легко могут быть обобщены на случай произвольной тензорной плотности.

Ковариантная производная от тензорной плотности $A^{i_1i_2\ldots i_k}_{j_1j_2\ldots j_l}(x)$ веса w по координате x^m определяется следующим образом: к обычной производной этой плотности по координате x^m на каждый контравариантный индекс i_s

добавляется член

$$\Gamma^{i_s}_{mp} A^{i_1 \ldots i_{s-1} p i_{s+1} \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l},$$

а на каждый ковариантный индекс j_s — член

$$-\Gamma^{p}_{m j_s} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_{s-1} p j_{s+1} \ldots j_l},$$

после чего из полученного выражения вычитается член

$$w \Gamma^{s}_{ms} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\nabla_m A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^m} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x) + \Gamma^{i_1}_{mp} A^{p i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x) + \\ &+ \Gamma^{i_2}_{mp} A^{i_1 p \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x) + \ldots + \Gamma^{i_k}_{mp} A^{i_1 i_2 \ldots p}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x) - \\ &- \Big[\Gamma^{p}_{m j_1} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{p j_2 \ldots j_l}(x) + \Gamma^{p}_{m j_2} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 p \ldots j_l}(x) + \ldots \\ &\ldots + \Gamma^{p}_{m j_l} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_p}(x)\Big] - w \Gamma^{s}_{ms} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x). \qquad (26.17)\end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи ковариантного дифференцирования тензорных плотностей.

1. Ковариантная производная от скаляра совпадает с частной производной:

$$\nabla_k \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}. \qquad (26.18)$$

2. Метрический тензор риманова пространства V_n ковариантно постоянен:

$$\nabla_k g^{li} = 0; \quad \nabla_k g_{li} = 0. \qquad (26.19)$$

3. Ковариантная дивергенция от плотности контравариантного вектора A^i веса $+1$ совпадает с «обычной» дивергенцией:

$$\nabla_i A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}. \qquad (26.20)$$

4. Ковариантная дивергенция от плотности антисимметрического тензора F^{ik} веса $+1$ также совпадает

с «обычной» дивергенцией:

$$\nabla_k F^{ki} = \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^k}. \tag{26.21}$$

5. Результат альтернирования ковариантной производной от ковариантного вектора A_k в римановом пространстве не зависит от метрики:

$$\nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

Совершенно аналогично результат альтернирования ковариантной производной от антисимметрического k раз ковариантного ($k > 1$) тензора в римановом пространстве V_n также не зависит от метрики риманова пространства:

$$\nabla_{[j} A_{i_1 i_2 \ldots i_l]} = \frac{\partial}{\partial x^{[j}} A_{i_1 i_2 \ldots i_l]}.$$

6. Ковариантная производная символов Кронекера равна нулю:

$$\nabla_k \delta^i_l = 0.$$

7. Определитель метрического тензора ковариантно постоянен:

$$\nabla_l g = 0. \tag{26.22}$$

8. Ковариантное дифференцирование суммы, разности и произведения тензоров подчиняется правилам обычного дифференцирования.

9. Вследствие условия независимости значений непрерывных вторых частных производных от порядка дифференцирования

$$\frac{\partial^2}{\partial x^p \partial x^q} A^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l} = \frac{\partial^2}{\partial x^q \partial x^p} A^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l}$$

результат ковариантного дифференцирования зависит от порядка ковариантных производных:

$$\begin{gathered}\nabla_p \nabla_q A^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l} = \nabla_q \nabla_p A^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l} + \\ + \left[A^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{s i_2 \ldots i_l} R^s_{i_1 qp} + A^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 s \ldots i_l} R^s_{i_2 qp} + \ldots + A^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots s} R^s_{i_l qp} \right] - \\ - \left[A^{s j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l} R^{j_1}_{sqp} + A^{j_1 s \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l} R^{j_2}_{sqp} + R^{j_k}_{sqp} A^{j_1 j_2 \ldots s}_{i_1 i_2 \ldots i_l} \right], \end{gathered} \tag{26.23}$$

где R^i_{klm} — тензор кривизны риманова пространства V_n (тензор Римана — Кристоффеля):

$$R^i_{klm}=\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}+\Gamma^i_{ls}\Gamma^s_{km}-\Gamma^i_{ms}\Gamma^s_{kl}. \qquad (26.24)$$

Опуская контравариантный индекс в этом выражении, получим запись тензора кривизны в ковариантных компонентах

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{mi}}{\partial x^l\partial x^k}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\partial x^l}\right)+ \\ +g_{qp}\left(\Gamma^p_{kl}\Gamma^q_{mi}-\Gamma^p_{km}\Gamma^q_{il}\right). \qquad (26.25)$$

В силу своей конструкции тензор кривизны (26.25) обладает следующими свойствами симметрии:

а) антисимметрия относительно перестановки индексов в каждой из пар ik и lm:

$$R_{iklm}=-R_{kilm}=-R_{ikml}=R_{kiml}; \qquad (26.26)$$

б) симметрия по отношению к перестановке пар индексов ik и lm друг с другом:

$$R_{iklm}=R_{lmik}; \qquad (26.27)$$

в) равенство нулю результата альтернирования по любым трем индексам (тождество Риччи):

$$R_{[ikl]m}=\frac{1}{3!}\left(R_{iklm}+R_{likm}+R_{klim}\right)=0. \qquad (26.28)$$

Кроме того, тензор кривизны (26.24) удовлетворяет тождеству Бианки — Падова:

$$R^i_{klm;\,p}+R^i_{kpl;\,m}+R^i_{kmp;\,l}=0. \qquad (26.29)$$

Таким образом, в силу соотношений (26.26) — (26.28) тензор кривизны риманова пространства (26.25) имеет

$$N=\frac{n^2(n^2-1)}{12} \qquad (26.30)$$

независимых компонент, через которые могут быть линейно выражены все n^4 компонент этого тензора. Свертывая индексы i и l в выражении (26.24), приходим к симметрическому тензору Риччи:

$$R_{km} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{ki}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{is}\Gamma^s_{km} - \Gamma^i_{ms}\Gamma^s_{ki}. \qquad (26.31)$$

Поднимая один из индексов тензора Риччи (26.31) и свертывая его с другим, получим скаляр, называемый скалярной кривизной риманова пространства V_n:

$$R = R^i_i = g^{im} R_{im}. \qquad (26.32)$$

В римановой геометрии важную роль играет также тензор Гильберта, являющийся линейной комбинацией тензора Риччи и скалярной кривизны:

$$G^k_l = R^k_l - \frac{1}{2}\delta^k_l R. \qquad (26.33)$$

Легко убедиться, что поднятие индекса k в тождестве Бианки — Падова (26.29) и последующее свертывание индексов il и km в полученном выражении приводит к ковариантному уравнению сохранения тензора Гильберта (26.33)

$$\nabla_k G^k_l = 0. \qquad (26.34)$$

Тензор кривизны является одной из важнейших характеристик риманова пространства V_n, отражающей внутренние свойства этого пространства.

В частности, условием приводимости квадратичной формы (26.3) к диагональному виду сразу во всех точках риманова пространства V_n является требование равенства нулю тензора кривизны:

$$R^i_{klm} = 0. \qquad (26.35)$$

Риманово пространство V_n в этом случае называется плоским.

Более общим римановым пространством V_n является пространство постоянной кривизны, т. е. пространство V_n, в каждой точке которого кривизны его по возможным двумерным направлениям одинаковы.

В случае пространства постоянной кривизны тензор Римана — Кристоффеля (26.25) имеет вид

$$R_{ipml} = k\,(g_{im}g_{pl} - g_{il}g_{pm}), \qquad (26.36)$$

где k — кривизна.

В силу теоремы Шура в пространстве V_n $(n > 2)$ постоянной кривизны кривизна k сохраняет постоянное значение во всех точках:

$$k = \text{const}.$$

Из выражения (26.36) следует, что $R = kn(n-1)$, а поэтому при $n > 1$ для пространства V_n постоянной кривизны имеем следующее определение:

$$R_{ipml} = \frac{R}{n(n-1)} (g_{im}g_{pl} - g_{il}g_{pm}), \qquad (26.37)$$

где R — скалярная кривизна.

В зависимости от знака R возможны следующие три случая. Если $R > 0$, то пространство называется пространством постоянной положительной кривизны, или эллиптическим пространством (пространством Римана). Это пространство имеет конечный объем, но не имеет границ. При $R = 0$ пространство V_n называется плоским (евклидовым или псевдоевклидовым пространством). Если $R < 0$, то пространство V_n называется пространством постоянной отрицательной кривизны, или гиперболическим пространством (пространством Лобачевского). Последние два пространства являются бесконечными, имеющими бесконечный объем.

Изучим теперь свойства тензора кривизны риманова пространства V_n при $n = 1, 2, 3$. В случае $n = 1$ риманово пространство является одномерным и каждый из индексов в выражении (26.25) для тензора кривизны может принимать только одно значение. Следовательно, тензор кривизны этого пространства тождественно равен нулю, поскольку нельзя построить ни одну его компоненту, которая удовлетворяла бы условиям антисимметрии (26.26). Таким образом, одномерное риманово пространство V_1 с необходимостью является плоским.

В случае двумерного риманова пространства V_2 тензорные индексы могут принимать два значения: 1 и 2. Поэтому метрический тензор g_{ik} будет иметь три компоненты: g_{11}, g_{12} и g_{22}. Тензор кривизны (26.25) в этом случае может иметь ненулевую компоненту R_{1212}, а, следовательно, и другие компоненты, получаемые из нее подстановкой индексов с учетом свойств симметрии (26.26)—(26.27). Поскольку риманово пространство V_2

имеет только одну независимую компоненту тензора кривизны, то этот тензор может быть выражен через скалярную кривизну R и метрический тензор g_{ik}. Действительно, учитывая, что

$$R = 2R_{1212}[g^{11}g^{22} - (g^{12})^2],$$

получим

$$R_{1212} = \frac{R}{2[g^{11}g^{22} - (g^{12})^2]}.$$

Так как в римановом пространстве V_2 справедливо равенство

$$[g^{11}g^{22} - (g^{12})^2]^{-1} = g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2,$$

то компоненту R_{1212} можно записать в виде

$$R_{1212} = \frac{R}{2}(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12}).$$

Таким образом, в римановом пространстве V_2 имеем

$$R_{iklm} = \frac{R}{2}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{lk}). \tag{26.38}$$

Следовательно, риманово пространство V_2 с необходимостью является пространством постоянной кривизны. Легко убедиться, что тензор Гильберта (26.33) этого пространства тождественно равен нулю

$$G^i_k \equiv 0. \tag{26.39}$$

В римановом пространстве V_3 тензор кривизны имеет шесть независимых компонент. По шесть компонент имеют также тензор Риччи и метрический тензор этого пространства.

Совершенно аналогично случаю риманова пространства V_2 можно показать, что тензор кривизны риманова пространства V_3 может быть выражен через тензор Риччи и скалярную кривизну

$$R_{iklm} = -\frac{R}{2}(g_{il}g_{km} - g_{kl}g_{im}) +$$
$$+ (R_{il}g_{km} + R_{km}g_{il} - R_{kl}g_{im} - R_{im}g_{kl}). \tag{26.40}$$

Однако в дальнейшем для нас будет представлять наибольший интерес риманово пространство V_4. Метрический тензор g_{ik} и тензор Риччи (26.31) этого пространства имеют по десять независимых компонент, в то время как тензор кривизны имеет двадцать независимых компонент, поэтому в римановом пространстве V_4 тензор кривизны в общем случае нельзя выразить через скалярную кривизну (26.32) и тензор Риччи (26.31).

Как мы знаем, все физические процессы протекают в пространстве и времени. Для описания этих процессов часто используется четырехмерное пространство событий, точками которого являются элементарные события. Очевидно, что пространство событий в общем случае является римановым пространством V_4. Однако одна из координат этого риманова пространства, а именно время, как показывает опыт, является выделенной. Выделенность этой координаты состоит в том, что после приведения квадратичной формы (26.3) в любой точке пространства событий к диагональному виду, квадрат дифференциала времени будет иметь знак, противоположный знаку квадратов дифференциалов остальных (пространственных) координат. Выбирая для определенности знак квадрата дифференциала времени в этом случае положительным, получим, что сигнатура метрики пространства событий равна —2 и имеет вид (+, —, —, —).

Для подчеркивания выделенности времени мы будем называть пространство событий псевдоримановым пространством V_4 (или просто римановым пространством-временем), считая время нулевой координатой этого пространства:

$$x^0 = ct.$$

Если тензор кривизны псевдориманова пространства V_4 будет равен нулю, то это пространство мы будем называть псевдоевклидовым (или просто плоским пространством-временем). Условимся также считать, что латинские индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, а греческие — 1, 2, 3. В этом случае имеем:

$$x^i = [x^0,\ x^\alpha] = [ct,\ \mathbf{r}].$$

Следует отметить, что в псевдоримановом пространстве V_4 мы уже не можем производить произвольные преобразования (25.2) координат, а должны, в силу выделенности времени, использовать лишь допустимые системы координат, в которых компонента g_{00} положительна:

$$g_{00} > 0, \qquad (26.41)$$

а трехмерная квадратичная форма $g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ отрицательна:

$$g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta < 0. \qquad (26.42)$$

Тогда в любой системе координат, удовлетворяющей условиям (26.41)—(26.42), компонента x^0 будет всегда иметь характер времени, а компоненты x^α—характер пространственных координат.

В силу критерия Сильвестра, как я уже отмечал, требования (26.42) эквивалентны условиям

$$g_{11} < 0; \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{vmatrix} < 0. \qquad (26.43)$$

Отметим также, что на компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора риманова пространства-времени условие допустимости системы координат не налагает никаких ограничений.

§ 27. Физическое поле и естественная геометрия для него

В любой физической теории, в которой полевой переменной является тензорная величина, форма дифференциальных уравнений поля не должна зависеть от выбора координат, в которых описывается данный процесс. Это может быть достигнуто двумя путями: использованием в уравнениях поля только ковариантных производных в естественной для этого процесса метрике пространства-времени, либо путем составления тензорной величины из функций поля и их частных (нековариантных) производных. В последнем случае уравнения поля будут существенно нелинейными.

Любому физическому полю соответствует некоторая геометрия, называемая естественной, именно такая, что в отсутствие взаимодействия с другими полями фронт свободной волны этого физического поля движется по геодезическим естественного пространства-времени.

Распространение фронта волны безмассового поля