§ 28. Условие форминвариантности метрического тензора

Как следует из § 2, условие форминвариантности метрики при преобразовании координат (2.15) можно записать в виде

$$g'_{ik}(x) = g_{ik}(x). \tag{28.1}$$

Изучим его подробнее. Для этого рассмотрим инфинитезимальное преобразование координат

$$x'^i = x^i + \xi^i(x) \tag{28.2}$$

с бесконечно малым вектором $\xi^i(x)$ и определим условия, при которых уравнение (28.1) выполняется в первом порядке по $\xi^i(x)$. В этом случае уравнение (28.1) можно записать в виде

$$\delta_{\mathrm{L}} g_{ik} = g'_{ik}(x) - g_{ik}(x) = 0, \tag{28.3}$$

где введено обозначение δ_{L} для вариации в духе дифференциала Ли (вариация Ли). Таким образом, условие форминвариантности метрики риманова пространства-времени (28.1) при инфинитезимальном преобразовании координат (28.2) эквивалентно требованию обращения в нуль вариации Ли от метрического тензора.

В соотношении (28.3) вариации Ли от каждой из $n(n+1)/2$ компонент метрического тензора риманова пространства-времени не являются независимыми и могут быть выражены через n компонент вектора $\xi^i(x)$. Найдем эту зависимость. По определению (28.3) имеем

$$\delta_{\mathrm{L}} g^{ik} = g'^{ik}(x) - g^{ik}(x). \tag{28.4}$$

Ввиду того, что при преобразованиях координат метрический тензор риманова пространства-времени обладает трансформационным законом

$$g'^{ik}(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m} g^{ml}(x(x')),$$

в случае преобразования (28.2) с точностью до линейных по $\xi^i(x)$ членов получим

$$g'^{ik}(x+\xi) = g^{ik}(x) + g^{is}(x)\,\partial_s\xi^k + g^{ks}(x)\,\partial_s\xi^i.$$

Отсюда следует, что

$$g'^{ik}(x)=g^{ik}(x)+g^{is}(x)\partial_s\xi^k+g^{ks}(x)\partial_s\xi^i-\xi^s\partial_s g^{ik}(x).$$

Подставляя это соотношение в выражение (28.4), имеем

$$\delta_L g^{ik}=g^{is}\partial_s\xi^k+g^{ks}\partial_s\xi^i-\xi^s\partial_s g^{ik}=\nabla^i\xi^k+\nabla^k\xi^i. \quad (28.5)$$

В силу соотношения

$$\delta_L g_{ik}=-g_{is}g_{km}\delta_L g^{sm}$$

из (28.3) и (28.5) получим окончательно

$$\delta_L g_{ik}=-\nabla_i\xi_k-\nabla_k\xi_i=0. \quad (28.6)$$

Таким образом, условие форминвариантности метрики (28.3) будет выполнено, если уравнения (28.6) имеют решение. В научной литературе уравнения (28.6) принято называть уравнениями Киллинга, а векторы $\xi^i(x)$, удовлетворяющие уравнениям (28.6), —векторами Киллинга.

§ 29. Геометрия пространства-времени и законы сохранения

Векторы Киллинга играют фундаментальную роль в физике. С одной стороны, как мы видели, существование векторов Киллинга в римановом пространстве-времени гарантирует и существование группы бесконечно малых преобразований координат, оставляющих метрический тензор форминвариантным, а следовательно, гарантирует наличие физически эквивалентных систем отсчета, в которых все физические явления протекают одинаково при соответственных начальных и граничных условиях.

С другой стороны, существование векторов Киллинга тесно связано и с существованием интегральных законов сохранения для замкнутой системы взаимодействующих полей в римановом пространстве-времени. Как известно [27], построение теории любого физического поля может быть произведено на основе лагранжева формализма. В этом случае физическое поле описывается некоторой функцией координат и времени, называемой функцией поля, уравнения для которой могут быть получены из вариационного принципа стационарного действия. Кроме уравнений поля, лагранжев путь построения