Отсюда следует, что

$$g'^{ik}(x)=g^{ik}(x)+g^{is}(x)\,\partial_s\xi^k+g^{ks}(x)\,\partial_s\xi^i-\xi^s\partial_s g^{ik}(x).$$

Подставляя это соотношение в выражение (28.4), имеем

$$\delta_{\mathrm{L}}g^{ik}=g^{is}\,\partial_s\xi^k+g^{ks}\,\partial_s\xi^i-\xi^s\,\partial_s g^{ik}=\nabla^i\xi^k+\nabla^k\xi^i. \qquad (28.5)$$

В силу соотношения

$$\delta_{\mathrm{L}}g_{ik}=-g_{is}g_{km}\delta_{\mathrm{L}}g^{sm}$$

из (28.3) и (28.5) получим окончательно

$$\delta_{\mathrm{L}}g_{ik}=-\nabla_i\xi_k-\nabla_k\xi_i=0. \qquad (28.6)$$

Таким образом, условие форминвариантности метрики (28.3) будет выполнено, если уравнения (28.6) имеют решение. В научной литературе уравнения (28.6) принято называть уравнениями Киллинга, а векторы $\xi^i(x)$, удовлетворяющие уравнениям (28.6), — векторами Киллинга.

§ 29. Геометрия пространства-времени и законы сохранения

Векторы Киллинга играют фундаментальную роль в физике. С одной стороны, как мы видели, существование векторов Киллинга в римановом пространстве-времени гарантирует и существование группы бесконечно малых преобразований координат, оставляющих метрический тензор форминвариантным, а следовательно, гарантирует наличие физически эквивалентных систем отсчета, в которых все физические явления протекают одинаково при соответственных начальных и граничных условиях.

С другой стороны, существование векторов Киллинга тесно связано и с существованием интегральных законов сохранения для замкнутой системы взаимодействующих полей в римановом пространстве-времени. Как известно [27], построение теории любого физического поля может быть произведено на основе лагранжева формализма. В этом случае физическое поле описывается некоторой функцией координат и времени, называемой функцией поля, уравнения для которой могут быть получены из вариационного принципа стационарного действия. Кроме уравнений поля, лагранжев путь построения классической теории волновых полей дает возможность получать и ряд дифференциальных соотношений, носящих название дифференциальных законов сохранения. Эти соотношения являются следствиями инвариантности функции действия при преобразованиях координат пространства-времени и связывают между собой локальные динамические характеристики поля и их ковариантные производные в естественной для них геометрии.

В настоящее время в научной литературе принято различать два типа дифференциальных законов сохранения: сильные и слабые. Сильным законом сохранения обычно называют дифференциальное соотношение, которое выполняется в силу инвариантности функции действия при преобразованиях координат и не требует выполнения уравнений движения для поля. Слабые же законы сохранения могут быть получены из сильных, если учесть уравнения для системы взаимодействующих полей. Примером слабого закона сохранения может служить ковариантное уравнение сохранения полного тензора энергии-импульса системы в произвольном римановом пространстве-времени:

$$\nabla_m T^{ml} = \partial_m T^{ml} + \Gamma^m_{mi} T^{il} + \Gamma^l_{mi} T^{mi} = 0. \qquad (29.1)$$

Это уравнение может быть получено как следствие требования инвариантности функций действия системы взаимодействующих полей при произвольном бесконечно малом преобразовании координат и условии выполнения уравнений движения для всех полей.

Следует особо подчеркнуть, что, несмотря на название, дифференциальные законы сохранения в общем случае не утверждают о сохранении чего-либо ни локально, ни глобально. Это просто дифференциальные тождества, связывающие различные характеристики поля, которые выполняются в силу того, что функция действия не изменяется при произвольном преобразовании координат (т. е. является скаляром). Свое название эти соотношения получили по аналогии с соответствующими дифференциальными законами сохранения в псевдоевклидовом пространстве-времени, в котором из дифференциальных законов сохранения можно получить и соответствующие интегральные законы. Так, например, записывая закон сохранения полного тензора энергии-импульса системы взаимодействующих полей (29.1) в декартовой системе координат псевдоевклидова пространства-времени, имеем

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}T^{0i}=-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}T^{i\alpha}.$$

Интегрируя это равенство по некоторому объему и используя теорему Остроградского—Гаусса, получим

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int T^{0i}\,dV=-\oint T^{\alpha i}\,dS_{\alpha}.$$

Это соотношение означает, что изменение энергии-импульса системы взаимодействующих полей в некотором объеме равно потоку энергии-импульса через поверхность, ограничивающую данный объем. Если поток энергии-импульса через некоторую поверхность отсутствует

$$\oint T^{\alpha i}\,dS_{\alpha}=0,$$

то мы приходим к закону сохранения полного 4-импульса изолированной системы:

$$\frac{d}{dt}P^{i}=0,$$

где

$$P^{i}=\frac{1}{c}\int T^{0i}\,dV.$$

Аналогичные интегральные соотношения в псевдоевклидовом пространстве-времени можно получить и для момента импульса.

В римановом же пространстве-времени наличие дифференциального ковариантного уравнения сохранения не гарантирует возможность получения соответствующего интегрального закона сохранения.

Возможность получения интегральных законов сохранения в римановом пространстве-времени целиком предопределяется его геометрией и тесно связана с существованием векторов Киллинга данного пространства-времени или, как иногда говорят, с наличием группы движений в римановом пространстве-времени. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее, поскольку развитый здесь формализм можно использовать для получения интегральных законов сохранения и в произвольных криволинейных системах координат псевдоевклидова пространства-времени. Умножим уравнение сохранения (29.1) на вектор Киллинга, т. е. на вектор $\eta_l(x)$, удовлетворяющий уравнениям Киллинга (28.6). В силу симметрии тензора T^{ml} полученное выражение может быть записано в виде

$$\eta_l \nabla_m T^{ml} = \nabla_m [\eta_l T^{ml}] = 0.$$

Используя свойства ковариантной производной, отсюда имеем

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^m} [\sqrt{-g}\, T^{ml} \eta_l] = 0.$$

Так как левая часть этого равенства является скаляром, то мы можем умножить его на $\sqrt{-g}\, dV$ и проинтегрировать по некоторому объему. В результате получим интегральный закон сохранения в римановом пространстве-времени:

$$\frac{d}{dx^0} \int \sqrt{-g}\, T^{0l} \eta_l\, dV = -\oint \sqrt{-g}\, T^{\alpha l} \eta_l\, dS_\alpha. \quad (29.2)$$

Если поток трехмерного вектора $T^{\alpha l}\eta_l$ через поверхность, ограничивающую объем, отсутствует, то

$$\int \sqrt{-g}\, T^{0l} \eta_l\, dV = \text{const}.$$

Таким образом, при наличии векторов Киллинга из дифференциального уравнения сохранения (29.1) можно получить и интегральные законы сохранения (29.2).

§ 30. Условия разрешимости уравнений Киллинга

Выясним теперь, при каких ограничениях на метрику риманова пространства-времени уравнения Киллинга (28.6) имеют решения, т. е. при каких условиях существует вектор, удовлетворяющий уравнениям (28.6).

Уравнения Киллинга (28.6) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Согласно общей теории [22] для выяснения условий интегрируемости системы дифференциальных уравнений в частных производных ее необходимо привести к виду

$$\frac{\partial \Theta^a}{\partial x^i} = \Psi_i^a (\Theta^b,\ x^l), \quad (30.1)$$