странства-времени. Умножим уравнение сохранения (29.1) на вектор Киллинга, т. е. на вектор $\eta_l(x)$, удовлетворяющий уравнениям Киллинга (28.6). В силу симметрии тензора T^{ml} полученное выражение может быть записано в виде

$$\eta_l \nabla_m T^{ml} = \nabla_m [\eta_l T^{ml}] = 0.$$

Используя свойства ковариантной производной, отсюда имеем

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^m} [\sqrt{-g}\, T^{ml} \eta_l] = 0.$$

Так как левая часть этого равенства является скаляром, то мы можем умножить его на $\sqrt{-g}\, dV$ и проинтегрировать по некоторому объему. В результате получим интегральный закон сохранения в римановом пространстве-времени:

$$\frac{d}{dx^0} \int \sqrt{-g}\, T^{0l} \eta_l\, dV = -\oint \sqrt{-g}\, T^{\alpha l} \eta_l\, dS_\alpha. \tag{29.2}$$

Если поток трехмерного вектора $T^{\alpha l}\eta_l$ через поверхность, ограничивающую объем, отсутствует, то

$$\int \sqrt{-g}\, T^{0l} \eta_l\, dV = \mathrm{const}.$$

Таким образом, при наличии векторов Киллинга из дифференциального уравнения сохранения (29.1) можно получить и интегральные законы сохранения (29.2).

§ 30. Условия разрешимости уравнений Киллинга

Выясним теперь, при каких ограничениях на метрику риманова пространства-времени уравнения Киллинга (28.6) имеют решения, т. е. при каких условиях существует вектор, удовлетворяющий уравнениям (28.6).

Уравнения Киллинга (28.6) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Согласно общей теории [22] для выяснения условий интегрируемости системы дифференциальных уравнений в частных производных ее необходимо привести к виду

$$\frac{\partial \Theta^a}{\partial x^i} = \Psi_i^a (\Theta^b,\ x^l), \tag{30.1}$$

где Θ^a — неизвестные функции; $i, l = 1, 2, \ldots, n$; $a, b = 1, 2, \ldots, M$. Тогда условия интегрируемости системы (30.1) можно получить из равенства

$$\frac{\partial^2\Theta^a}{\partial x^i\,\partial x^l} = \frac{\partial^2\Theta^a}{\partial x^l\,\partial x^i},$$

заменяя частные производные первого порядка правой частью уравнений (30.1):

$$\frac{\partial\Psi_i^a}{\partial x^l} + \frac{\partial\Psi_i^a}{\partial\Theta^b}\Psi_l^b = \frac{\partial\Psi_l^a}{\partial x^i} + \frac{\partial\Psi_l^a}{\partial\Theta^b}\Psi_i^b. \tag{30.2}$$

Если условия интегрируемости (30.2) выполняются тождественно в силу уравнений (30.1), то система (30.1) называется вполне интегрируемой и ее решение содержит M параметров — максимально возможное для данной системы число произвольных постоянных.

Если же система (30.1) не является вполне интегрируемой, то ее решение будет содержать меньшее число произвольных постоянных. Определим, при каких условиях решение уравнений Киллинга (28.6) в римановом пространстве V_n содержит максимально возможное число параметров, и чему равно это число.

Все вычисления будем вести в явно ковариантном виде, являющемся ковариантным обобщением приведенной выше схемы нахождения условий интегрируемости системы дифференциальных уравнений в частных производных. Для этого сначала приведем уравнения Киллинга (28.6) к требуемому виду. Продифференцируем ковариантно уравнения Киллинга (28.6) по переменной x^l. В результате получим

$$\eta_{i;\,kl} + \eta_{k;\,il} = 0.$$

В силу этого уравнения имеем

$$\eta_{i;\,jl} + \eta_{j;\,il} + \eta_{i;\,lj} + \eta_{l;\,ij} - \eta_{j;\,li} - \eta_{l;\,ji} = 0.$$

Перегруппировав слагаемые в этом выражении, получим

$$\eta_{i;\,jl} + \eta_{i;\,lj} + [\eta_{j;\,il} - \eta_{j;\,li}] + [\eta_{l;\,ij} - \eta_{l;\,ji}] = 0. \tag{30.3}$$

С другой стороны, в силу правила коммутации ковариантных производных, имеем

$$\eta_{i;\,lj} - \eta_{i;\,jl} = \eta_h R^h_{ilj}. \tag{30.4}$$

Подставляя выражение (30.4) в соотношение (30.3), получим

$$2\eta_{i;\,jl}+\eta_h R^h_{ilj}+\eta_h R^h_{jil}+\eta_h R^h_{lij}=0. \qquad (30.5)$$

Воспользовавшись тождеством Риччи

$$R^h_{ijl}+R^h_{jli}+R^h_{lij}=0, \qquad (30.6)$$

имеем

$$\eta_h R^h_{ilj}+\eta_h R^h_{jil}=\eta_h R^h_{lij}.$$

Поэтому выражение (30.5) можно записать в виде

$$\eta_{i;\,jl}=-\eta_h R^h_{lij}.$$

Таким образом, мы имеем следующие ковариантные уравнения:

$$\eta_{i;\,j}+\eta_{j;\,i}=0; \quad \eta_{i;\,jl}=-\eta_h R^h_{lij}. \qquad (30.7)$$

Преобразуем эту систему ковариантных дифференциальных уравнений в систему, содержащую только первые ковариантные производные. Для этого наряду с n неизвестными компонентами вектора η_i введем неизвестный тензор λ_{ij} в соответствии с уравнением:

$$\eta_{i;\,j}=\lambda_{ij}. \qquad (30.8)$$

Этот тензор содержит n^2 неизвестных компонент, но независимы среди них лишь $n(n-1)/2$ компонент, так как этот тензор является антисимметрическим в силу уравнений (28.6) и (30.8):

$$\lambda_{ij}+\lambda_{ji}=0. \qquad (30.9)$$

С учетом всего этого искомая система ковариантных дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} \eta_{i;\,j}&=\lambda_{ij};\\ \lambda_{ij;\,l}&=\eta_h R^h_{lji}. \end{aligned} \qquad (30.10)$$

Таким образом, уравнения Киллинга (28.6) мы привели к системе специального вида, состоящей из линейных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно ковариантных производных первого порядка.

Эта система является ковариантным обобщением системы (30.1), причем роль неизвестных функций Θ^α играют

$n(n+1)/2$ компонент тензоров λ_{ij} и η_i

$$\Theta^\alpha = [\eta_i, \lambda_{ij}].$$

Условие интегрируемости системы (30.10) можно получить из правила коммутации ковариантных производных, являющегося следствием независимости порядка производных при частном дифференцировании. На основании этого правила имеем

$$\begin{aligned} \eta_{i;\,jl} - \eta_{i;\,lj} &= \eta_h R^h_{ijl}; \\ \lambda_{im;\,jl} - \lambda_{im;\,lj} &= \lambda_{ih} R^h_{mjl} + \lambda_{hm} R^h_{ijl}. \end{aligned} \qquad (30.11)$$

Заменяя в левых частях этих равенств первые ковариантные производные выражениями (30.10) и используя свойство (30.9) антисимметричности тензора λ_{im}, условия интегрирования системы (30.10) получим в виде

$$\lambda_{im;\,j} - \lambda_{ij;\,m} = \eta_h R^h_{imj}; \qquad (30.12)$$

$$[\eta_h R^h_{jmi}]_{;\,l} - [\eta_h R^h_{lmi}]_{;\,j} = \lambda_{ih} R^h_{mjl} + \lambda_{hm} R^h_{ijl}. \qquad (30.13)$$

Легко убедиться в том, что первое из этих выражений тождественно выполняется в силу уравнений (30.10) системы и свойств тензора кривизны. Таким образом, если условие (30.13) будет тождественно выполняться в силу лишь свойств симметрии риманова пространства-времени, то система (30.10) будет вполне интегрируемой, а, следовательно, решение уравнений Киллинга (28.6) будет содержать максимально возможное число $M = n(n+1)/2$ произвольных постоянных. Поскольку неизвестные функции η_i и $\lambda_{im} = -\lambda_{mi}$, входящие в систему (30.10), при этом должны быть независимыми, то левая часть выражения (30.13) обращается в тождественный нуль лишь при выполнении условий

$$R^h_{mij;\,l} - R^h_{lij;\,m} = 0; \qquad (30.14)$$

$$\delta^s_j R^h_{iml} - \delta^h_j R^s_{iml} - \delta^s_i R^h_{jml} + \delta^h_i R^s_{jml} + \delta^s_l R^h_{mij} - \delta^h_l R^s_{mij} - \\ - \delta^s_m R^h_{lij} + \delta^h_m R^s_{lij} = 0. \qquad (30.15)$$

Свертывание выражения (30.15) по индексам l и s с учетом соотношений

$$R^s_{ims} = -R_{im}; \quad R^s_{smi} = 0$$

и тождества Риччи (30.6) дает

$$-(n-1)\,R^h_{mij} = \delta^h_j R_{mi} - \delta^h_i R_{jm}.$$

Отсюда следует, что

$$-R_{lmij}=\frac{1}{(n-1)}[g_{jl}R_{mi}-g_{il}R_{jm}]. \qquad (30.16)$$

Умножая это равенство на g^{mi}, получим

$$nR_{jl}=g_{jl}R.$$

Подставляя это соотношение в выражение (30.16), получим условие, в силу которого равенство (30.15) выполняется тождественно:

$$R_{lmij}=\frac{R}{n(n-1)}[g_{jl}g_{mi}-g_{il}g_{jm}]. \qquad (30.17)$$

Из выражения (30.17) и уравнения (30.14) следует требование, которому должна удовлетворять скалярная кривизна:

$$[\delta_j^h g_{im}-\delta_i^h g_{jm}]\frac{\partial}{\partial x^l}R-[\delta_j^h g_{li}-\delta_i^h g_{lj}]\frac{\partial}{\partial x^m}R=0.$$

Умножая это соотношение на $\delta_h^l g^{mi}$, имеем

$$(n-1)\frac{\partial}{\partial x^i}R=0.$$

Так как в рассматриваемом нами случае $n>1$, то для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы $R=\mathrm{const}$. Следовательно, условия интегрируемости (30.14) и (30.15) уравнений Киллинга (28.6) будут выполняться тождественно, если и только если тензор кривизны риманова пространства-времени имеет вид

$$R_{lmij}=\frac{R}{n(n-1)}[g_{jl}g_{mi}-g_{il}g_{jm}],$$

где $R=\mathrm{const}$.

Таким образом, уравнения Киллинга только тогда имеют решения, содержащие максимально возможное число $M=n(n+1)/2$ произвольных постоянных (параметров), когда риманово пространство V_n является пространством постоянной кривизны. Если же пространство V_n не является пространством постоянной кривизны, то число параметров будет меньше.

Следовательно, с математической точки зрения наличие интегральных законов сохранения энергии-импульса и момента импульса, а также существование группы физически эквивалентных систем отсчета являются отражением определенных свойств пространства-времени: его свойств однородности и изотропности. Существует три типа четырехмерных пространств [24], обладающих свойствами однородности и изотропности в такой степени, что они допускают введение десяти интегралов движения для замкнутой системы и десятипараметрической группы преобразований координат, оставляющих метрический тензор форминвариантным: пространство постоянной отрицательной кривизны (пространство Лобачевского), пространство нулевой кривизны (псевдоевклидово пространство) и пространство постоянной положительной кривизны (пространство Римана). Первые два пространства являются бесконечными, имеющими бесконечный объем, третье пространство является замкнутым, имеющим конечный объем, но не имеющим границ.

§ 31. Векторы Киллинга и законы сохранения в псевдоевклидовом пространстве-времени

Найдем теперь векторы Киллинга в произвольной криволинейной системе координат псевдоевклидова пространства-времени. Для этого запишем сначала уравнения Киллинга в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\eta_j+\frac{\partial}{\partial x^j}\eta_i=0.$$

Следовательно, для определения векторов Киллинга мы имеем систему из десяти линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Решая эту систему по общим правилам, получим

$$\eta_i=a_i+w_{ij}x^j, \tag{31.1}$$

где a_i — произвольный постоянный бесконечно малый вектор; w_{ij} — произвольный постоянный бесконечно малый тензор, удовлетворяющий условию

$$w_{ij}=-w_{ji}. \tag{31.2}$$

Таким образом, решение (31.1), как и следовало ожидать, содержит все десять произвольных параметров.

Поскольку в выражение (31.1) входят десять независимых параметров, то фактически мы имеем десять неза-