чески эквивалентных систем отсчета являются отражением определенных свойств пространства-времени: его свойств однородности и изотропности. Существует три типа четырехмерных пространств [24], обладающих свойствами однородности и изотропности в такой степени, что они допускают введение десяти интегралов движения для замкнутой системы и десятипараметрической группы преобразований координат, оставляющих метрический тензор форминвариантным: пространство постоянной отрицательной кривизны (пространство Лобачевского), пространство нулевой кривизны (псевдоевклидово пространство) и пространство постоянной положительной кривизны (пространство Римана). Первые два пространства являются бесконечными, имеющими бесконечный объем, третье пространство является замкнутым, имеющим конечный объем, но не имеющим границ.

§ 31. Векторы Киллинга и законы сохранения в псевдоевклидовом пространстве-времени

Найдем теперь векторы Киллинга в произвольной криволинейной системе координат псевдоевклидова пространства-времени. Для этого запишем сначала уравнения Киллинга в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\eta_j+\frac{\partial}{\partial x^j}\eta_i=0.$$

Следовательно, для определения векторов Киллинга мы имеем систему из десяти линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Решая эту систему по общим правилам, получим

$$\eta_i=a_i+\omega_{ij}x^j, \tag{31.1}$$

где a_i — произвольный постоянный бесконечно малый вектор; ω_{ij} — произвольный постоянный бесконечно малый тензор, удовлетворяющий условию

$$\omega_{ij}=-\omega_{ji}. \tag{31.2}$$

Таким образом, решение (31.1), как и следовало ожидать, содержит все десять произвольных параметров.

Поскольку в выражение (31.1) входят десять независимых параметров, то фактически мы имеем десять независимых векторов Киллинга, а соотношение (31.1) представляет собой линейную комбинацию этих десяти независимых векторов.

Выясним смысл этих параметров. Подставляя выражение (31.2) в соотношение (28.2), получим

$$x'^i = x^i + a^i + w^i_j x^j. \tag{31.3}$$

Из этого выражения видно, что четыре параметра a^i являются компонентами 4-вектора бесконечно малых трансляций системы отсчета. Три параметра $w_{\alpha\beta}$ являются компонентами тензора поворота на бесконечно малый угол вокруг некоторой оси (так называемые чистые вращения). Три параметра $w_{0\beta}$ описывают бесконечно малые повороты в плоскости $x^0 x^\beta$, называемые лоренцевыми вращениями. Так как метрический тензор γ_{mi} форминвариантен относительно трансляций, то псевдоевклидово пространство-время является однородным; его свойства не зависят от того, в какой точке пространства-времени помещено начало координат. Аналогично из форминвариантности метрического тензора γ_{mi} при преобразованиях четырехмерных поворотов следует его изотропность. Это означает, что в псевдоевклидовом пространстве-времени все направления равноправны.

Таким образом, псевдоевклидово пространство-время допускает десятипараметрическую группу движений, состоящую из четырехпараметрической подгруппы трансляций и шестипараметрической подгруппы поворотов. Наличие этой группы движения и существование соответствующих векторов Киллинга гарантирует наличие десяти интегральных законов сохранения энергии-импульса и момента импульса системы взаимодействующих полей.

Действительно, учитывая, что в декартовой системе координат $\sqrt{-g} = 1$, из общего соотношения (29.2) в случае подгруппы трансляций ($\eta_i = a_i$) имеем

$$\frac{d}{dx^0} \int T^{0i} a_i \, dV = -\oint T^{\alpha i} a_i \, dS_\alpha.$$

Так как a^i — произвольный постоянный вектор, то из этого равенства имеем

$$\frac{d}{dx^0} \int T^{0i} \, dV = -\oint T^{\alpha i} \, dS_\alpha.$$

Для изолированной системы взаимодействующих полей выражение в правой части этого соотношения равно нулю, в результате чего ее полный 4-импульс сохраняется:

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{0i}\, dV = \mathrm{const}. \tag{31.4}$$

Совершенно аналогично, при

$$\eta_i = \omega_{ij} x^j$$

получим

$$\frac{d}{dx^0}\int T^{0i} x^j \omega_{ij}\, dV = -\oint T^{\alpha i} x^j \omega_{ij}\, dS_\alpha.$$

Поскольку постоянный тензор ω_{ij} является антисимметрическим, то отсюда следует интегральный закон сохранения момента импульса:

$$\frac{d}{dx^0}\int [T^{0i}x^j - T^{0j}x^i]\, dV = -\oint [T^{\alpha i}x^j - T^{\alpha j}x^i]\, dS_\alpha. \tag{31.5}$$

Для изолированной системы ее полный момент импульса сохраняется из-за обращения в нуль правой части равенства (31.5):

$$M^{ij} = \frac{1}{c}\int [T^{0i}x^j - T^{0j}x^i]\, dV = \mathrm{const}. \tag{31.6}$$

Следует отметить, что решение уравнений Киллинга (28.6) в произвольных криволинейных координатах псевдоевклидова пространства-времени в силу тензорного характера величин x^i и η^i мы можем получить из решения (31.1) этих уравнений в декартовой системе координат. Для этого перейдем в выражении (31.1) от декартовых координат x^i к произвольным криволинейным координатам $x^i_{\text{н}}$

$$x^i = f^i(x^l_{\text{н}}).$$

Тогда получим

$$\eta^{\text{н}}_i = \frac{\partial f^l}{\partial x^i_{\text{н}}}\, \eta_l\, (x_{\text{e}}(x_{\text{н}})).$$

Таким образом, в произвольной криволинейной системе координат псевдоевклидова пространства-времени векторы Киллинга имеют вид

$$\eta_i = \frac{\partial f^l}{\partial x^i_{\text{н}}}\, a_l + \frac{\partial f^l}{\partial x^i_{\text{н}}}\, f^j(x_{\text{н}})\, \omega_{lj}. \tag{31.7}$$

Обобщение выражений (31.4)—(31.6) на случай произвольных криволинейных координат не представляет особого труда. Поступая аналогично проделанному выше, для 4-импульса изолированной системы получим

$$P^i = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g(x_{\text{н}})}\, dx_{\text{н}}^1\, dx_{\text{н}}^2\, dx_{\text{н}}^3\, T^{0l}(x_{\text{н}})\, \frac{\partial f^i(x_{\text{н}})}{\partial x_{\text{н}}^l}.$$

Антисимметрический тензор момента импульса в этом случае имеет вид

$$M^{ij} = \frac{1}{c}\int dx_{\text{н}}^1\, dx_{\text{н}}^2\, dx_{\text{н}}^3 \sqrt{-g(x_{\text{н}})}\, T^{0s}(x_{\text{н}}) \times \left[f^j(x_{\text{н}}) \frac{\partial f^i(x_{\text{н}})}{\partial x_{\text{н}}^s} - f^i(x_{\text{н}}) \frac{\partial f^j(x_{\text{н}})}{\partial x_{\text{н}}^s} \right].$$

Таким образом, от характера геометрии пространства-времени зависит как возможность получения интегральных законов сохранения, так и существование физически эквивалентных систем отсчета. В случае четырех измерений, в том числе и для физического пространства-времени, только пространства постоянной кривизны обладают всеми десятью интегральными законами сохранения и десятипараметрической группой физически эквивалентных систем; в других же пространствах число их меньше десяти.

Следует отметить, что, начиная с работ Пуанкаре [5], в научной литературе обсуждается вопрос о связи геометрии и физики. При этом утверждается, что поскольку только геометрия в соединении с физикой дает проверяемые на опыте вещи, то выбор геометрии для описания явлений может быть произвольным, хотя, быть может, и осложняющим описание. Однако, как мы видели, выбор геометрии не является предметом соглашения, а определяется физическими принципами: требованием законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения для замкнутой системы взаимодействующих полей. А так как эти физические законы повседневно проверяются при изучении свойств материи, то тем самым производится и проверка геометрии пространства-времени реального мира.

Таким образом, проведенный нами анализ показал, что электродинамика фактически привела к открытию единства пространства-времени. В результате этого открытия принцип относительности утратил свою ведущую роль в теории и стал следствием псевдоевклидовой геометрии единого пространства-времени.

Вместе с тем наличие псевдоевклидовой геометрии у пространства-времени позволило нам ввести новый принцип — обобщенный принцип относительности, справедливый как для инерциальных, так и для неинерциальных систем отсчета. Это обстоятельство явно указывает, что укоренившиеся в научной литературе [8, 11, 19, 64] утверждения о неприменимости специальной теории относительности к описанию физических процессов в неинерциальных системах отсчета являются неправильными.

§ 32. Риманова геометрия и гравитация

Среди всех взаимодействий в природе гравитационное занимает особое место. Во-первых, оно является универсальным, ему подвержены все известные формы материи. Во-вторых, его действие на вещество в корне отличается от действия других сил: как свидетельствуют результаты измерений искривления луча света и запаздывания радиосигнала в гравитационном поле Солнца, воздействие гравитационного поля на волну сводится к искривлению фронта волны. А так как распространение фронта волны безмассового поля (уравнение характеристик)

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}=0$$

и также движение свободных материальных частиц (уравнение Гамильтона—Якоби)

$$g^{ik}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{\partial \Psi}{\partial x^k}=m^2c^2$$

определяются метрическим тензором, то это означает, что гравитационное поле как бы изменяет геометрию для остальных полей материи. Поэтому возникает вопрос, можно ли ввести гравитационное поле так, чтобы его действие на остальные поля материи было эквивалентным изменению геометрии для этих полей, а само гравитационное поле можно было бы считать полем в духе Фарадея — Максвелла, с его обычными свойствами носителя энергии и импульса.